بسم الله الرحمن الرحیم

عنوان

کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه‌های چندکالایی با تابع هزینه مقعر

فهرست نمادها و علائم ریاضی

صفحه	نام	نماد
۳۳	مجموعه کمان‌های گراف G	A
۳۳	مجموعه اندیس راس‌های گراف G	N
۳۳	مجموعه اندیس کالاها	K
۳۳	میزان ظرفیت کمان (i,j)	D_{ij}
۳۳	میزان ظرفیت کمان (i,j) برای کالای k	u_{ij}^k
۳۳	مجموعه اندیس گره‌های مبدا (عرضه) برای کالای نوع kام	$SO(k)$
۳۳	مجموعه اندیس گره‌های مقصد (تقاضا) برای کالای نوع kام	$SD(k)$
۴۶	گره مبدا (عرضه) کالای k	$O(k)$
۴۶	گره مقصد (تقاضا) کالای k	$D(k)$
۳۳	مقدار تقاضا از کالای k در گره i	d_i^k
۳۷	مجموعه مسیرهای بین (s^k, t^k)	N^k
۳۷	اگر کمان (i,j)، کمانی از مسیر pام کالای k باشد مقدار آن برابر با ۱ در غیر این صورت صفر است	$\pi_p^k(i,j)$
۳۷	مقدار کالای k که باید از مبدا s^k به مقصد t^k ارسال شود	d^k
۴۷	شیب قطعه خط rام کمان (i,j)	c_{ij}^r
۴۷	مقدار هزینه ثابت قطعه خط rام کمان (i,j)	f_{ij}^r
۴۷	کران بالای مقدار جریان در قطعه خط rام کمان (i,j)	b_{ij}^r
۳۳	مقدار جریان کالای نوع kام که از کمان (i,j) عبور می‌کند	w_{ij}^k
۳۳	مجموع کالای انتقال یافته از کمان (i,j)	x_{ij}
۳۳	تابع هزینه انتقال x_{ij} واحد کالا از کمان (i,j)	$g_{ij}(x_{ij})$
۳۳	تابع هزینه انتقال w_{ij}^k واحد کالا از کمان (i,j)	$h_{ij}^k(w_{ij}^k)$
۳۸	مقدار کالایی که از مسیر $p \in N^k$ برای کالای k ارسال می‌شود	x_p^k
۴۸	مقدار جریان کالای kام که در قطعه خط rام تابع هزینه کمان (i,j) قرار می‌گیرد	x_{ij}^{kr}
۴۸	اگر مقدار جریان در کمان (i,j) در قطعه خط rام تابع هزینه قرار بگیرد مقدار ۱ در غیر این صورت مقدار صفر اختیار می‌کند	y_{ij}^r

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

پیش‌گفتار

مساله‌های مربوط به شبکه دسته‌ای از مساله‌های بهینه‌سازی هستند، که کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف مهندسی و علوم دارند. دسته‌ای خاص از مساله‌های شبکه، مساله کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه‌های چند کالایی با تابع هزینه مقعر است که هدف، ارسال K نوع کالای مختلف از مبداهای [۱] مشخص به مقصدهای[۲] مشخص در یک شبکه است. به طوری که، تقاضا در هر گره مقصد و هم‌چنین، عرضه در هر گره مبدا، از پیش مشخص است. هم‌چنین، هزینه‌ی انتقال کالا از هر کمان در شبکه، تابعی مقعر[۳] از مقدار جریان عبوری است. کمان‌ها ممکن است، دارای محدودیت ظرفیت [۴] نیز باشند. هدف، انتقال کالا از گره‌های مبدا به گره‌های مقصد است به طوری که، مجموع هزینه‌های انتقال کالاها کمینه شود. ازجمله کاربردهای این مساله می‌توان به طراحی شبکه‌های مخابراتی، مساله‌های حمل ونقل، مساله برنامه‌ریزی تولید و زمان‌بندی وسایل نقلیه اشاره کرد.

در این پژوهش به بررسی مساله تخصیص جریان در شبکه چندکالایی با تابع هزینه قطعه‌ای خطی مقعر خواهیم پرداخت. در فصل اول تاریخچه، کاربردهای مساله و تعاریف اولیه مورد نیاز را بیان خواهیم کرد. در فصل دوم، مدل‌های ریاضی مساله را معرفی کرده و پیچیدگی زمانی و ویژگی‌های مساله را مرور خواهیم کرد. سپس، روش‌های حل ارایه شده برای مساله با تابع هزینه مقعر را بررسی خواهیم کرد. در فصل سوم، به روش‌های حلی که تاکنون برای مساله کمینه کردن هزینه تخصیص

[۱] Source [۲] Sink [۳] Concave [۴] Capacity

جریان در شبکه چند کالایی با تابع هزینه قطعه‌ای خطی مقعر ارایه شده، می‌پردازیم. این روش‌ها، بر پایه‌ی آزادسازی لاگرانژ و افزودن نامساوی‌های معتبر است. در فصل چهارم روشی که بر پایه افزودن نامساوی‌های معتبر بوده را پیاده‌سازی کرده و نتایج آن را بر روی شبکه‌های یک کالایی، ۵ کالایی و ۱۰ کالایی مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فصل ۱

مرور ادبیات

۱.۱ تاریخچه

مساله‌های شبکه نخستین بار توسط کیرشهف [۱] و اویلر [۲] مورد استفاده قرارگرفت و توسعه‌ی اصلی تئوری آن بعد از انتشار اولین کتاب تئوری گراف توسط کنیگ [۳] در سال ۱۹۳۶ اتفاق افتاد [۲۶].

مساله‌های دیگر شبکه، بین سال‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ میلادی به خصوص با کارهای فورد [۴] و فولکرسن [۵] آغاز شد و پس از آن پژوهشگران زیادی به آن‌ها پرداختند. مساله‌ی کوتاه‌ترین مسیر در شبکه، حداکثر جریان در شبکه و تخصیص جریان در شبکه با حداقل هزینه نمونه‌ای از این مساله‌ها است. زنگویل [۷۱] در سال ۱۹۶۸ اولین پژوهشگری بود که مساله کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه‌های چند کالایی با تابع هزینه مقعر را معرفی نمود و الگوریتمی بر پایه برنامه‌ریزی پویا برای آن ارایه کرد. پس از آن، کلزیگ [۶] اولین پژوهشگری است که روش حلی برای مساله‌ی تخصیص جریان در یک شبکه چند کالایی با تابع هدف غیر خطی دلخواه ارایه نموده است [۱] .

[۱] Kirchhoff [۲] Euler [۳] Konig [۴] Ford [۵] Fulkerson [۶] Klessig

مواردی نظیر هزینه‌های راه‌اندازی[۱] ، تخفیفات[۲] و مقیاس اقتصادی[۳] باعث به وجود آمدن تابع هدف غیرخطی می‌شوند [۳۵]. زمانی که مساله دارای هزینه راه‌اندازی است، در واقع مساله‌ای از نوع هزینه ثابت [۴] داریم. تقعر این تابع را در بخش ۳.۱ بررسی می‌کنیم.

۲.۱ کاربردها

مساله کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه با تابع هزینه مقعر دارای کاربردهای بسیاری است که می‌توان به عنوان نمونه به موارد زیر اشاره کرد:

۱. برنامه‌ریزی تولید[۵] [۳۵]،

۲. برنامه‌ریزی حمل و نقل[۶] [۳۵]،

۳. سیستم‌های انتقال گاز طبیعی از سواحل دریا [۱۴]،

۴. سیستم‌های بهسازی فاضلاب منطقه‌ای [۴۱]،

۵. برنامه‌ریزی سیستم‌های توزیع[۷] [۴]،

۶. مساله تخصیص درجه دو [۳۵]،

۷. طراحی شبکه‌های مخابراتی [۶۵، ۶۸]،

۸. مساله تعیین موقعیت منابع [۴۰، ۷۰]،

۹. ترافیک شهری [۲]،

[۱] Start-up Costs [۲] Discounts [۳] Economic of Scale [۴] Fixed Charge [۵] Production Planning
[۶] Transportation Planning [۷] Distribution System Planning

۱۰. زمان‌بندی وسایل نقلیه[1] [۴].

در ادامه به اختصار، به توضیح چند مورد از کاربردها خواهیم پرداخت.

۱.۲.۱ برنامه‌ریزی تولید

در مساله‌های برنامه‌ریزی تولید هدف تعیین مقدار بهینه‌ی تولید و انبار کالاها در دوره‌های زمانی متفاوت است. به طوری که، افزون بر پاسخ به تقاضای مشتریان، مجموع هزینه‌های تولید و نگهداری کمینه شود.

ساده‌ترین نوع مساله‌های برنامه‌ریزی تولید، مساله معروف واگنر-ویتن[2] است. فرض کنید قصد تولید کالایی را برای n دوره زمانی[3] دارید و تقاضا برای دوره زمانی iام، مقدار مشخص d_i است. هم‌چنین، هزینه‌ی تولید و انبارداری هر واحد کالا در هر دوره زمانی تابعی از میزان تولید و تعداد کالایی است که در هر دوره انبار می‌شود. هدف، پیدا کردن میزان بهینه‌ی تولید و انبار کالا در هر دوره است، به طوری که، افزون بر برآورده شدن تقاضا در هر دوره زمانی مجموع هزینه‌های تولید و انبارداری نیز کمینه شود. متغیرهای مساله عبارت است از:

x_i : تعداد کالای تولیدی در دوره‌ی iام، $i = 1, \cdots, n$.

I_i : تعداد کالایی که در دوره‌ی iام باید انبار شود، $i = 1, \cdots, n$.

در این مساله، فرض بر آن است که در ابتدای دوره‌ی اول و در پایان دوره‌ی nام کالایی در انبار نداشته باشیم، یعنی، $I_0 = I_n = 0$.

پارامترهای مساله نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

d_i : میزان تقاضا در دوره‌ی iام، $i = 1, \cdots, n$.

[1] Multivehicle Scheduling [2] Wagner – Whitin [3] Period

$P_i(x_i)$: هزینه‌ی تولید x_i واحد کالا در دوره‌ی iام، $i = ۱, \cdots, n$.

$H_i(I_i)$: هزینه‌ی نگهداری I_i واحد کالا در دوره‌ی iام، $i = ۱, \cdots, n$.

مدل ریاضی مساله فوق به صورت زیر بیان شده است:

$$\min \quad \sum_{i=۱}^{n} P_i(x_i) + \sum_{i=۱}^{n} H_i(I_i) \tag{۱.۱}$$

$$\text{s.t.}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i = \sum_{i=۱}^{n} d_i \tag{۲.۱}$$

$$d_i + I_i - x_i - I_{i-۱} = ۰ \qquad \forall i = ۱, \cdots, n \tag{۳.۱}$$

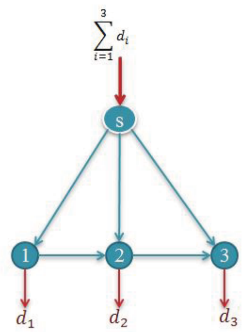
$$x_i \geq ۰ \qquad \forall i = ۱, \cdots, n \tag{۴.۱}$$

$$I_i \geq ۰ \qquad \forall i = ۱, \cdots, n \tag{۵.۱}$$

$$I_۰ = I_n = ۰ \tag{۶.۱}$$

تابع هدف (۱.۱)، مجموع هزینه‌های تولید و انبارداری را برای n دوره زمانی نشان می‌دهد. فرض کنید $P_i(x)$ تابعی مقعر باشد (در ادامه مثالی برای آن ارایه خواهیم کرد) در این صورت، بنا به قضیه ۷.۳.۱، تابع هدف مساله، تابعی مقعر است زیرا از مجموع توابع مقعر به دست آمده است. قید (۲.۱)، ضمانت می‌کند که موجودی انبار در پایان دوره‌ی nام صفر باشد. مجموعه قیدهای (۳.۱) برآورده شدن تقاضا در دوره‌ی iام را ضمانت می‌کنند. هم‌چنین، میزان موجودی انبار را برای دوره‌ی بعد به روزرسانی می‌کنند.

شکل ۱.۱، شبکه‌ی متناظر با مساله‌ی واگنر و ویتن برای سه دوره‌ی زمانی است. در این شکل، هر یک از گره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان‌دهنده‌ی یک دوره‌ی زمانی هستند که هر دوره زمانی دارای d_i واحد تقاضا است. مقدار جریان در هر یک از کمان‌های $(i, i+۱)$ نشان‌دهنده‌ی تعداد کالای انبار شده در پایان دوره‌ی iام است (I_i). مقدار جریان در هر یک از کمان‌های (s, i) بیان‌کننده تعداد کالا



شکل ۱.۰۱: شبکه متناظر با مساله واگنر و ویتن برای سه دوره [۷۱]

تولید شده در دوره‌ی iام است که هزینه متناظر با آن $P_i(x_i)$ است. به عنوان نمونه، تابع مقعر هزینه‌ی $P_i(x)$ را می‌توان این چنین فرض کنید که اگر در دوره iام بخواهیم تولید داشته باشیم، علاوه بر c_i واحد هزینه تولید هر کالا، به مقدار f_i واحد نیز هزینه‌ی ثابت تولید داریم. بنابراین تابع هزینه‌ی هر کمان یک تابع هزینه ثابت است که برای هر کمان (s,i) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_i(x_i) = \begin{cases} f_i + c_i x_i & x_i > ۰ \\ ۰ & x_i = ۰ \end{cases}$$

مثال‌های دیگری از کاربرد مساله کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه با تابع هزینه مقعر در مساله‌های برنامه‌ریزی تولید را می‌توان در [۳۵] ملاحظه کرد.

مساله انبارداری[۱] که در [۴] به آن اشاره شده است، مشابه مساله‌های برنامه‌ریزی تولید است. با این تفاوت که به جای یک کالا، چند کالا داریم. در این مساله، یک کارخانه محصولات مختلف را در برخی از فصل‌های سال تولید می‌کند. در حالی که، تقاضای هر محصول در ماه‌های مختلف سال متفاوت است. جهت تامین این تقاضا، کارخانه محصولات را در انباری به ظرفیت R ذخیره می‌کند. این میزان ظرفیت بین همه محصولات مشترک است. هدف در این مساله یافتن میزان بهینه تولید از

[۱] Warehousing Problem

هر کالا است. به طوری که، افزون بر تامین تقاضا در هر دوره، هزینه تولید و نگهداری کمینه شود. برای تبدیل این مساله به مساله شبکه چندکالایی، موارد زیر تعریف می‌شوند:

d_i^k : مقدار تقاضای محصول k برای دوره iام، $i = ۱, ..., n$.

c_i^k : میزان ظرفیت تولید محصول k در دوره iام، $i = ۱, ..., n$.

$P_i^k(.)$: تابع هزینه تولید محصول kام برای دوره iام، $i = ۱, ..., n$.

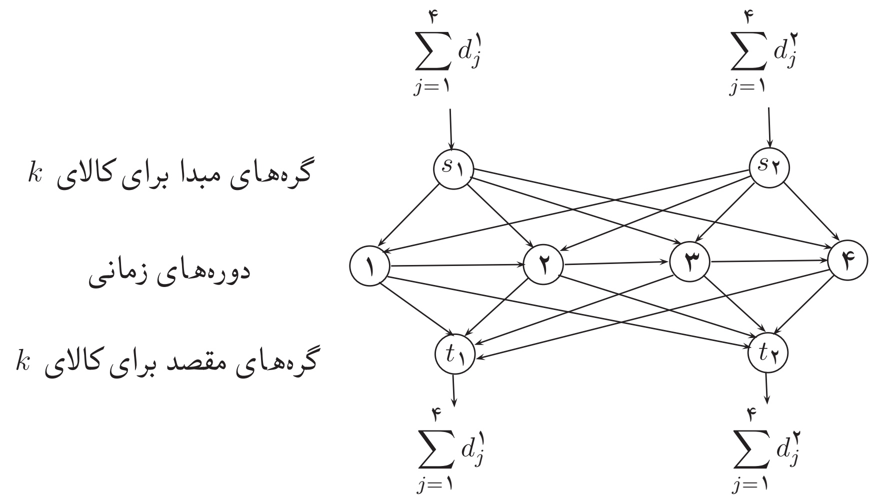
$H_i(.)$: تابع هزینه نگهداری محصولات از دوره i به دوره $(i + ۱)$ام، $i = ۱, ..., n$.

مثال ۱.۲.۱. برنامه‌ریزی برای تولید دو محصول در چهار دوره زمانی را در نظر بگیرید. شکل ۲.۱، شبکه مرتبط با این مساله را نشان می‌دهد. در این شبکه گره‌ها با شماره‌های ۱, ۲, ۳, ۴ نشان‌دهنده چهار دوره‌ی زمانی است. گره s^k گره عرضه و گره t^k گره تقاضای کالای kام است. میزان عرضه و تقاضای هر کالا در گره‌های مربوطه برابر با میزان کل تقاضای آن کالا برای ۴ ماه است. کمان‌های (s^k, i) دارای ظرفیت c_i^k و تابع هزینه $P_i^k(.)$ است. برای کمان‌های متصل به گره‌های تقاضا، (i, t^k)، هزینه برابر صفر و ظرفیت برابر d_i^k در نظر گرفته می‌شود. برای باقی کمان‌ها، $(i, i + ۱)$، هزینه $H_i(.)$ و ظرفیت کمان برابر R در نظر گرفته می‌شود.

۲.۲.۱ مساله حمل و نقل

فرض کنید می‌خواهید کالایی را از k نقطه‌ی عرضه کننده برای n نقطه‌ی تقاضا ارسال کنید. هر یک از نقاط عرضه‌کننده، d_i واحد توانایی ارسال کالا دارد. هم‌چنین، هر یک از نقاط مقصد، دارای r_i واحد تقاضا است. هزینه‌ی انتقال x واحد کالا در کمان (i, j)، از تابع هزینه‌ی $f_{ij}(x)$ پیروی می‌کند.

بنابراین، مساله‌ی حمل و نقل با تابع هدف مقعر به یک مساله کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه با تابع هزینه مقعر تبدیل می‌شود. مثال‌هایی از مساله حمل و نقل را می‌توانید در [۱۴، ۳۰، ۳۵، ۵۰] ملاحظه کنید.

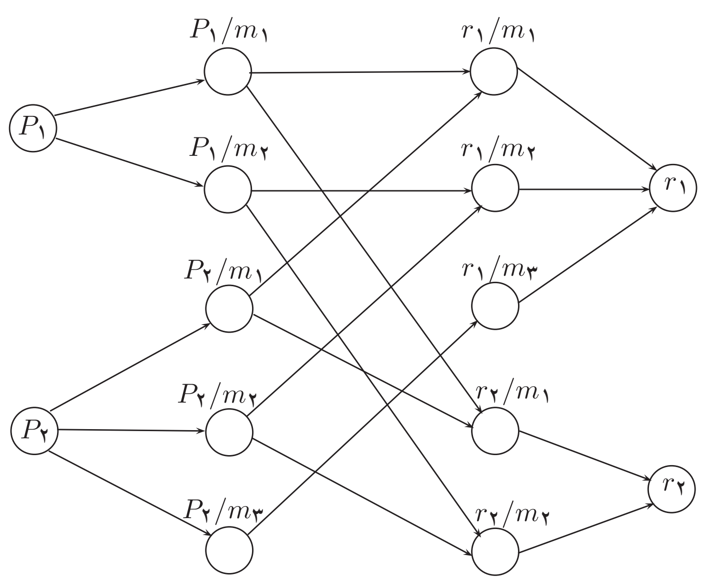


شکل ۲.۱: شبکه مربوط به مساله ذخیره‌سازی دو کالایی [۴]

۳.۲.۱ برنامه‌ریزی سیستم‌های توزیع

در این مساله، چندین نوع محصول متفاوت داریم که در مکان‌های مختلف تولید می‌شوند. میزان تولید هر محصول در هر کارخانه مشخص است. در مکان‌های دیگر نیز نمایندگی‌های توزیع این محصولات قرار دارند، که میزان تقاضای هر نمایندگی از هر نوع محصول مشخص است. هدف این است که در هر کارخانه، از هر محصول به چه اندازه تولید و به کدام نمایندگی‌ها ارسال کنیم که کمترین هزینه تولید و حمل و نقل را داشته باشیم. برای روشن‌تر شدن این موضوع، مثال ساده‌ای را بیان می‌کنیم. یک کارخانه تولید خودرو، سه نوع خودرو متفاوت تولید می‌کند. این شرکت در سطح کشور دارای دو کارخانه تولیدی و دو نمایندگی فروش است. یکی از کارخانه‌ها، تجهیزات تولید فقط دو نوع خودرو را دارد. میزان تقاضای هر یک از نمایندگی‌ها از هر نوع خودرو، توان تولیدی هر کارخانه، هزینه تولید هر نوع خودرو در هر کارخانه و هزینه انتقال هر نوع خودرو به هر یک از نمایندگی‌ها از قبل مشخص است. این شرکت می‌خواهد برنامه تولید و توزیع خودروها را مشخص کند به طوری که کمترین هزینه را بپردازد. شبکه متناظر با این مساله به صورت شکل ۳.۱ است. در این شبکه چهار

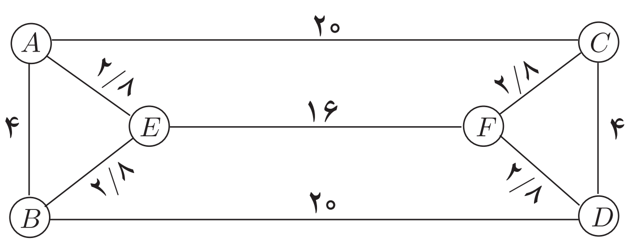
دسته گره داریم. گره P_i متناظر با کارخانه تولیدی iام و گره r_i متناظر با نمایندگی iام است. گره‌های P_i/m_k متناظر با خودرو نوع m_k است که در کارخانه P_i تولید می‌شود. گره‌های r_i/m_k نشان‌دهنده خودرو از نوع m_k است که نمایندگی r_i به آن نیاز دارد. هم‌چنین، در این شبکه سه دسته کمان داریم که تابع هزینه آن‌ها متفاوت است. کمان‌هایی که از گره‌های P_i به گره‌های P_i/m_k متصل هستند، نشان‌دهنده تعداد خودرو نوع m_k است که توسط کارخانه P_i تولید می‌شود. لذا تابع هزینه این دسته از کمان‌ها تابع هزینه تولید هر نوع خودرو، در هر کارخانه است. کمان‌هایی که بین گره‌های P_i/m_k و گره‌های r_j/m_k است نشان‌دهنده تعداد خودرو m_k است که از کارخانه P_i به نمایندگی r_j منتقل می‌شود. پس تابع هزینه آن یک تابع انتقال کالا است. کمان‌هایی که از گره‌های r_i/m_k به گره r_i متصل هستند کمان‌های تقاضا با هزینه صفر هستند. از این رو، یک شبکه چندکالایی با تابع هزینه خطی یا غیرخطی (وابسته به تابع هزینه تولید و هزینه انتقال کالا) داریم.



شکل ۳.۱: شبکه توزیع محصولات شرکت خودروسازی [۴]

۴.۲.۱ طراحی شبکه‌های مخابراتی

شبکه‌ی مخابراتی هر شهر دارای چندین هزار مشترک است. اگر برای ارتباط بین مشترکین بخواهیم از هر مشترک، کابلی مستقیم به دیگر مشترکین وصل کنیم کاری پرهزینه و عملا نشدنی (برای شهرهای بزرگ) است. برای رفع این مشکل، ساختمان‌های اداری در سطح شهر به نام مرکز تلفن تاسیس شده است. مشترکین هر منطقه از طریق کابلی به مرکز تلفن منطقه خود متصل می‌شوند. پس تعداد مشترکین مراکز تلفن با یکدیگر متفاوت است. برای ارتباط دو مشترک a و b، نحوه برقراری ارتباطات به این صورت است که ابتدا مشترک a به مرکز تلفن منطقه خود متصل شده، سپس ارتباطی بین مراکز تلفن مشترکین a و b برقرار می‌شود و در نهایت، ارتباط بین مرکز تلفن منطقه مشترک b و مشترک b ایجاد می‌شود. می‌خواهیم نحوه ارتباط مراکز تلفن را با یکدیگر بررسی کنیم. برای فهم بهتر این موضوع، مطلب خود را در قالب یک مثال توضیح می‌دهیم. فرض کنید شهری دارای ۶ مرکز تلفن A, B, C, D, E, F است (در واقعیت تعداد مراکز بیش از این مقدار است. برای مثال، شهر مشهد در حال حاضر ۳۲ مرکز تلفن دارد (که با گسترش شهر این تعداد افزایش پیدا خواهد کرد). نحوه قرارگیری این مراکز و مسیرهایی که می‌توان بین آن‌ها ارتباط برقرار کنیم در شکل ۴.۱، نشان داده شده است. اعداد روی کمان‌ها نشان‌دهنده فاصله بین مراکز در واحد کیلومتر است. هزینه کابل‌کشی



شکل ۴.۱: نحوه قرارگیری مراکز تلفن یک شبکه مخابراتی [۶۵]

بین هر دو گره، تابعی مقعر است. به عنوان مثال، فرض کنید هر کیلومتر کابل یک رشته‌ای ۱ دلار، کابل ۱۰۰ رشته‌ای ۷۵ دلار و هر کابل ۲۰۰ رشته‌ای ۱۲۰ دلار باشد (بدیهی است که هزینه کابل‌کشی تابعی مقعر است. اگر تعداد رشته‌های کابل دو برابر شود هزینه آن دو برابر نمی‌شود. مشابه تابع

تخفیف با افزایش تعداد رشته کابل، رشد هزینه کاهش می‌یابد). فرض کنید می‌خواهیم بین هر یک از مراکز تلفن A و C و مراکز تلفن B و D با ۵۰ رشته کابل ارتباط برقرار کنیم. بین مراکز دیگر نیازی به برقراری ارتباط نداریم. سه روش برای برقراری ارتباط داریم. روش اول، ۵۰ رشته کابل از مرکز A مستقیم به مرکز C و ۵۰ رشته کابل دیگر از مرکز B مستقیم به مرکز D بکشیم. در این صورت هزینه این روش کابل‌کشی به صورت زیر است:

$$۲ \times (۲۰ \times ۱ \times ۵۰) = ۲۰۰۰$$

روش دوم، یک کابل ۱۰۰ رشته‌ای از A به C بکشیم. سپس ۵۰ رشته کابل از B به A و ۵۰ رشته‌ی دیگر از D به C بکشیم. هزینه این نوع روش به صورت زیر است:

$$(۲۰ \times ۷۵) + ۲ \times (۵۰ \times ۱ \times ۴) = ۱۹۰۰$$

روش سوم، بین هر زوج گره (A,E) ، (B,E)، (C,F) و (D,F) به تعداد ۵۰ رشته کابل و بین مراکز E و F یک کابل ۱۰۰ رشته‌ای بکشیم. هزینه این روش عبارت است از

$$۴ \times (۲/۸ \times ۵۰ \times ۱) + (۱۶ \times ۷۵) = ۱۷۶۰$$

ارزان‌ترین شبکه‌ای که تقاضاها را برآورده کند به چه صورت ساخته می‌شود؟ سوبابراتا [۶۵] و یاگد [۶۸] به بررسی دقیق مساله طراحی شبکه‌های مخابراتی و روش‌های حل آن پرداخته‌اند. یاگد این مساله را در مقیاس واقعی در سال ۱۹۷۱، در ایالات متحده آمریکا، پیاده‌سازی کرده است.

در این مثال نقاط A و B را نقاط عرضه و نقاط C و D را نقاط تقاضا در نظر بگیرید. مقدار عرضه در هر یک از نقاط عرضه کننده را ۵۰ واحد فرض کنید. از آن‌جا که تابع هزینه کابل‌کشی در هر کمان یک تابع مقعر است. لذا یک مساله تخصیص جریان در شبکه با تابع هزینه مقعر داریم.

۵.۲.۱ ترافیک شهری

یک شهر صنعتی را به n ناحیه‌ی مختلف افراز می‌کنیم. تعداد نیروی انسانی هر ناحیه مقدار عرضه آن ناحیه و نیروی انسانی مورد نیاز برای کارخانه‌های هر ناحیه را تقاضای هر ناحیه می‌نامیم. هدف

برآوردن تقاضای کارخانه‌ها است، به طوری که، کم‌ترین ترافیک در سطح شهر ایجاد شود. برای مدل‌سازی این مساله، نیروی انسانی هر کارخانه را کالاهای شبکه در نظر می‌گیریم. به بیان دیگر، حرکت کارگران کارخانه‌های ناحیه‌ی i را از مناطق مختلف به ناحیه‌ی مربوطه را حرکت کالای خاص i در شبکه تلقی می‌کنیم. بنابراین تعداد کالاهای موجود در شبکه برابر n خواهد بود.

مسیریابی پیام‌ها در شبکه‌های ارتباطی (که شباهت فراوانی با مساله تخصیص ترافیک دارد) می‌تواند به صورت شبکه چند کالایی مدل‌سازی شود. در این حالت، گره‌ها نمادی از ایستگاه‌های ارتباطی پیام‌ها هستند. کمان‌ها، معرف مسیرهای ارتباطی ظرفیت‌دار هستند. عرضه و تقاضا براساس تعداد پیامی که بین ایستگاه‌های مبدا و مقصد در یک دوره زمانی انتقال می‌یابند، مشخص می‌شود. در نهایت، هر جریان بین جفت مبدا–مقصد به عنون یک کالا در نظر گرفته می‌شود [۴].

۳.۱ تعاریف اولیه

در این بخش به بیان تعاریف و قضیه‌های اولیه مورد نیاز در این پایان‌نامه خواهیم پرداخت.

گراف و شبکه

تعریف ۱.۳.۱. یک گراف جهت‌دار $G = (N, A)$، شامل یک مجموعه N از گره‌ها و یک مجموعه A از کمان‌های جهت‌دار است. یک کمان جهت‌دار، زوج مرتب (i, j) از گره‌های متمایز است. به ازای هر کمان (i, j)، i را گره شروع و j را گره پایان گویند. کمان (i, j) خروجی از گره i و ورودی به گره j است و آن را مجاور i و j گویند.

تعریف ۲.۳.۱. گراف جهت‌دار $G = (N, A)$ را هم‌بند گویند، هرگاه بدون در نظر گرفتن جهت کمان‌ها، بین هر دو گره از کمان مسیری موجود باشد.

تعریف ۳.۳.۱. گراف جهت‌دار $G = (N, A)$ را یک درخت گویند، هرگاه بدون در نظر گرفتن جهت

کمان‌ها، گراف هم‌بند و بدون حلقه باشد.

تعریف ۴.۳.۱. یک شبکه یک گراف جهت‌دار $G = (N, A)$ همراه با بعضی اطلاعات عددی اضافی می‌باشد. مانند، اعداد d_i که نشان‌دهنده عرضه یا تقاضا گره‌های $i \in N$ هستند، اعداد نامنفی D_{ij} که نشان دهنده ظرفیت کمان‌های $(i, j) \in A$ هستند (که می‌توانند بی‌نهایت نیز باشند).

مجموعه‌های محدب و توابع مقعر

تعریف ۵.۳.۱. مجموعه $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ را محدب[۱] گویند هرگاه به ازای هر $X_۱, X_۲ \in \Omega$ و هر α، $۰ \leq \alpha \leq ۱$، داشته باشیم:

$$\alpha X_۱ + (۱ - \alpha) X_۲ \in \Omega$$

تعریف ۶.۳.۱. تابع f، تعریف شده روی مجموعه محدب Ω را مقعر گویند، هرگاه به ازای هر $X_۱, X_۲ \in \Omega$ و هر α، $۰ \leq \alpha \leq ۱$، داشته باشیم:

$$f(\alpha X_۱ + (۱ - \alpha) X_۲) \geq \alpha f(X_۱) + (۱ - \alpha) f(X_۲)$$

قضیه ۷.۳.۱. [۵۴] فرض کنید $f_۱, f_۲, \cdots, f_n$ توابعی مقعر روی مجموعه محدب Ω باشند. در این صورت، تابع $g = f_۱ + f_۲ + \cdots + f_n$ روی Ω، مقعر است.

تعریف ۸.۳.۱. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} b + cx & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ که $b, c > ۰$ هستند، تابع هزینه ثابت[۲] روی فضای $[۰, \infty)$ گویند.

لم ۹.۳.۱. [۱۰] تابع هزینه ثابت با ضابطه $f(x) = \begin{cases} b + cx & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ یک تابع مقعر روی فضای $[۰, \infty)$ است.

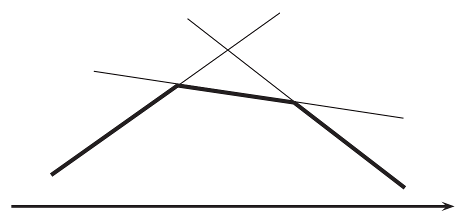
---

[۱] Convex [۲] Fixed Charge

لم ۱۰.۳.۱. [۱۳] فرض کنید c برداری در $\mathbb{R}^n$ و d عدد حقیقی باشد. تابع $f(x) = cx + d$ یک تابع خطی روی فضای $\mathbb{R}^n$ است.

قضیه ۱۱.۳.۱. [۱۳] فرض کنید توابع $f_۱, f_۲, \cdots, f_m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ مقعر باشند. در این صورت تابع g تعریف شده با ضابطه $g(x) = \min\limits_{i=۱,۲,\cdots,m} f_i(x)$ نیز مقعر است.

تعریف ۱۲.۳.۱. فرض کنید $c_۱, c_۲, \cdots, c_m$ بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ و $d_۱, d_۲, \cdots, d_m$ اعداد حقیقی باشند. تابع $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \min\limits_{i=۱,۲,\cdots,m} c_i^T x + d_i$ را یک تابع قطعه‌ای خطی مقعر گویند. تقعر این تابع از لم ۱۰.۳.۱ و قضیه ۱۱.۳.۱ نتیجه می‌شود. شکل۵.۱، نمودار یک تابع قطعه‌ای خطی مقعر در فضای $\mathbb{R}^۲$ را نشان می‌دهد.



شکل ۵.۱: یک تابع قطعه‌ای خطی مقعر در فضای $\mathbb{R}^۲$

قضیه ۱۳.۳.۱. [۵۴] مساله بهینه‌سازی P را در نظر بگیرید. که در آن $f(x)$ تابعی مقعر و Ω فضای جواب شدنی محدب، بسته، کران‌دار و ناتهی است. اگر مساله دارای جواب بهینه باشد، آن‌گاه دارای جواب بهینه در نقطه‌ی فرین [۱] است.

$$P: \quad \min f(x)$$

$$\text{s.t.}$$

$$x \in \Omega$$

[۱] Extrem Point

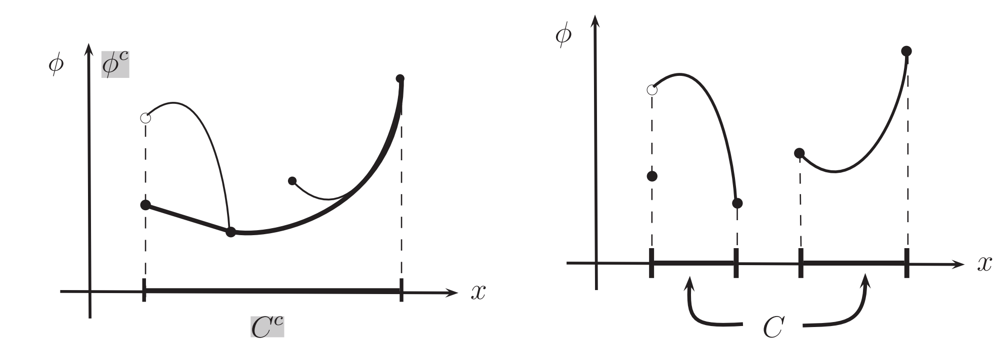
تعریف ۱۴.۳.۱. فرض کنید مجموعه S در $\mathbb{R}^n$ داده شده باشد. کوچکترین مجموعه محدبی که شامل S باشد، پوسته محدب[۱] S گویند و با $Conv(S)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر، $Conv(S)$ اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل S است.

فرض کنید ϕ یک تابع دلخواه تعریف شده روی مجموعه C در فضای $\mathbb{R}^n$ باشد. مجموعه $[C,\phi] = \{(x,\xi) : \xi \geq \phi(x), x \in C\}$ شامل همه نقاطی در $\mathbb{R}^{n+1}$ است، به طوری که، بالا یا برروی نمودار تابع ϕ قرار می‌گیرد. با توجه به تعریف ۱۴.۳.۱، مجموعه $Conv([C,\phi])$ کوچکترین مجموعه محدب شامل $[C,\phi]$ است.

تابع ϕ^c را به صورت رابطه (۷.۱) در نظر بگیرید. به تابع ϕ^c پوش پایینی محدب[۲] گویند. در واقع ϕ^c قسمت پایینی (زیرین) $Conv([C,\phi])$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع ϕ^c را با نماد C^c نشان می‌دهند.

$$\phi^c(x) = \inf\{\xi : (x,\xi) \in Conv([C,\phi])\} \qquad (۷.۱)$$

برای فهم بیشتر این مطلب شکل‌های ۶.۱ و ۷.۱ را ببینید. خطوط نقطه‌چین در شکل ۷.۱ پوش پایینی محدب یک تابع قطعه‌ای خطی مقعر را نشان می‌دهد.



(ب) تابع $\phi^c(x)$ به عنوان پوش پایینی محدب تابع $\phi(x)$

(آ) نمودار تابع $\phi(x)$

شکل ۶.۱: نمایش پوش پایینی محدب یک تابع [۲۱]

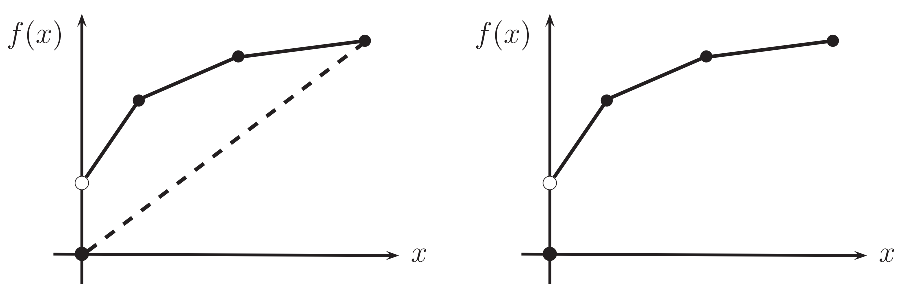
[۱] Convex Hull [۲] Lower Convex Envelope

زیرگرادیان تابع

تعریف ۱.۳.۱۵. فرض کنید S یک مجموعه محدب غیرتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد. هم‌چنین، فرض کنید $f : S \mapsto \mathbb{R}$ یک تابع مقعر باشد. در این صورت، ξ یک زیرگرادیان[۱] f در $\overline{x} \in S$ است هرگاه، رابطه زیر برقرار باشد.

$$f(x) \leq f(\overline{x}) + \xi^T(x - \overline{x}) \qquad \forall x \in S$$

مجموعه زیرگرادیان‌های تابع f در نقطه $\overline{x}$ را با $\partial f(\overline{x})$ نشان می‌دهند.



(آ) تابع قطعه‌ای خطی مقعر $f(x)$ (ب) پوش پایینی محدب تابع $f(x)$

شکل ۱.۷: نمودار یک تابع قطعه‌ای خطی مقعر و پوش پایینی محدب آن

قضیه ۱.۳.۱۶. [۱۰] فرض کنید S یک مجموعه محدب غیرتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد. هم‌چنین، فرض کنید $f : S \mapsto \mathbb{R}$ یک تابع مقعر باشد، آن‌گاه برای هر نقطه $\overline{x}$ درون S حداقل یک بردار زیرگرادیان مانند ξ وجود دارد. یعنی،

$$\exists\ \xi \in \mathbb{R}^n : \qquad f(x) \leq f(\overline{x}) + \xi^T(x - \overline{x}) \qquad \forall x \in S$$

قضیه ۱.۳.۱۷. [۱۰] فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ یک تابع مقعر و S یک مجموعه محدب غیرتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد. مساله بیشینه کردن $f(x)$ به طوری که، $x \in S$ باشد، را در نظر بگیرید. اگر $x^* \in S$ یک جواب بهینه محلی مساله باشد، آن‌گاه $\xi^T(x - x^*) \leq 0$ برای هر $x \in S$ و هر $\xi \in \partial f(x^*)$.

[۱] Subgradient

قضیه ۱.۳.۱۸. [۱۰] فرض کنید S یک مجموعه محدب غیرتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد. هم‌چنین، فرض کنید $f : S \mapsto \mathbb{R}$ یک تابع مقعر باشد. مساله بیشینه کردن $f(x)$ به طوری که، $x \in S$ باشد، را در نظر بگیرید. اگر $x^* \in S$ یک جواب بهینه نسبی برای مساله باشد، آن‌گاه x^* یک جواب بهینه مطلق است.

الگوریتم بهینه‌سازی زیرگرادیان

مساله بیشینه کردن $f(x)$ به طوری که، $x \in \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. یکی از روش‌های مورد استفاده برای پیدا کردن نقطه بهینه مساله مورد نظر، الگوریتم بهینه‌سازی زیرگرادیان است. این الگوریتم تعمیم یافته الگوریتم تندترین شیب[۱] است. ولی، با استفاده از زیرگرادیان تابع، دنباله‌ای از جواب‌های شدنی تولید می‌کند. به طوری که، به جواب بهینه محلی یا سراسری مساله هم‌گرا باشد. ساختار کلی الگوریتم بهینه‌سازی زیرگرادیان به صورت الگوریتم ۱ است.

الگوریتم ۱ الگوریتم بهینه‌سازی زیرگرادیان

گام اول. نقطه اولیه $x^1 \in \mathbb{R}^n$ و $\epsilon \geq 0$ را اختیار کنید. قرار دهید $k := 1$.

گام دوم. مقدار $f(x^k)$ را محاسبه کنید. زیرگرادیان ξ^k را از مجموعه $\partial f(x^k)$ اختیار کنید.

گام سوم. طول گام α_k را اختیار کنید. قرار دهید:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k \frac{\xi^k}{\|\xi^k\|}$$

اگر $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ آن‌گاه، متوقف شوید. در غیر این صورت، $k := k + 1$ و به گام ۲ بروید.

در الگوریتم زیرگرادیان نحوه تعیین طول گام α_k در هر مرحله، بر هم‌گرایی یا واگرایی الگوریتم و بر سرعت هم‌گرایی تاثیر بسزایی دارد. پژوهش‌های بسیاری برای تعیین دنباله‌ای از طول گام‌ها انجام شده است. برای نمونه، تعدادی از این روش‌ها را می‌توانید در [۶۷] ملاحظه کنید.

---

[۱] Steepest Descent

دوگان لاگرانژ یک مساله بهینه‌سازی

مساله اولیه P، را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$P: \qquad Z_P = \min f(x) \tag{۸.۱}$$

$$\text{s.t.}$$

$$g(x) \leq 0 \tag{۹.۱}$$

$$h(x) = 0 \tag{۱۰.۱}$$

$$x \in \Omega \tag{۱۱.۱}$$

که در آن $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$، $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ یک بردار از m تابع است. که مولفه‌ی iام آن تابع $g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ است. به طریق مشابه $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^l$ برداری از l تابع است. بردار $v \in \mathbb{R}^l$ و $\alpha \in \mathbb{R}^m \geq 0$ را به طور دلخواه اختیار کنید. زیر مساله لاگرانژ، برای P را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(\alpha, v) = \min_{x \in \Omega} \quad f(x) + \alpha^T g(x) + v^T h(x)$$

مولفه‌های بردار α و v را به ترتیب با α_i و v_i نشان می‌دهیم. به α_i و v_i متغیرهای دوگان یا ضرایب لاگرانژ گویند. که به ترتیب، متناظر با قیود $g_i(x)$ و $h_i(x)$ هستند.

دوگان لاگرانژ مساله P را با نماد D نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D: \qquad Z_D = \max \quad L(\alpha, v) \tag{۱۲.۱}$$

$$\text{s.t.}$$

$$\alpha \geq 0 \tag{۱۳.۱}$$

با توجه به این‌که کدام مجموعه از قیود را به کمک ضرایب لاگرانژ متناظرشان به تابع هدف انتقال می‌دهیم یک زیرمساله لاگرانژ جدید و متناظر آن یک دوگان لاگرانژ جدید برای مساله داریم.

قضیه ۱۹.۳.۱. [۱۰] فرض کنید x یک جواب شدنی برای مساله P باشد. یعنی، $x \in \Omega$، $g(x) \leq 0$

و $h(x) = 0$. هم‌چنین، (α, v) یک بردار لاگرانژ باشد. به طوری که، $\alpha \geq 0$. آن‌گاه $f(x) \geq L(\alpha, v)$.

نتیجه ۲۰.۳.۱. [۱۰] همواره داریم:

$$Z_P \geq Z_D = \max\{L(\alpha, v) : \alpha \geq 0\}$$

در ادامه جهت سهولت و بدون کاسته شدن از هیچ کلیتی بردارهای لاگرانژ α و v را ادغام کرده و با بردار w نشان می‌دهیم. هم‌چنین، توابع $g(x)$ و $h(x)$ را با $Q(x)$ نشان می‌دهیم. حال تقعر زیرمساله لاگرانژ $L(w)$ را اثبات می‌کنیم و یک زیرگرادیان برای آن معرفی می‌کنیم.

قضیه ۲۱.۳.۱. [۱۰] فرض کنید Ω یک مجموعه غیرتهی و کران‌دار در $\mathbb{R}^n$ باشد. هم‌چنین، فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ و $Q : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{m+l}$ توابع پیوسته باشند، آن‌گاه تابع $L(w)$ تعریف شده به صورت زیر به روی فضای $\mathbb{R}^{m+l}$ تابعی مقعر است.

$$L(w) = \min\{f(x) + w^T Q(x) : x \in \Omega\}$$

قضیه ۲۲.۳.۱. [۱۰] فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی و کران‌دار در $\mathbb{R}^n$ باشد. هم‌چنین، فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ و $Q : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{m+l}$ توابع پیوسته باشند. فرض کنید $\overline{x}$ جواب بهینه مساله $L(\overline{w})$ باشد که $\overline{w} \in \mathbb{R}^{m+l}$ یک بردار لاگرانژ دلخواه است. در این صورت، $Q(\overline{x})$ زیرگرادیان تابع $L(w)$ در $\overline{w}$ است.

آزادسازی لاگرانژ یک مدل ریاضی با متغیرهای صحیح

در این بخش، ارتباط و ویژگی‌های آزادسازی لاگرانژ و آزادسازی خطی را برای یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح بیان می‌کنیم. مطالب این بخش برگرفته از [۳۳] است. ابتدا نمادهای مورد استفاده را تعریف می‌کنیم.

Z_P : مقدار بهینه مساله P

Ω_P : فضای شدنی مساله P

$\overline{P}$: مساله P با حذف شرط صحیح بودن متغیرها (آزادسازی خطی مساله P)

$\overline{\alpha}$: مقدار بهینه متغیرهای دوگان نظیر قید $Ax \geq b$ در مساله $\overline{P}$

α^* : مقدار بهینه متغیرهای لاگرانژ در مساله دوگان لاگرانژ (D)

مساله اولیه را P می‌نامد و مدل ریاضی مساله به صورت زیر است. در این مدل J نشان‌دهنده مجموعه اندیس متغیرهای صحیح مساله است. هم‌چنین، در این مدل متغیرهای تصمیم‌گیری $x \in \mathbb{R}^n$ و پارامترهای مساله شامل بردارهای $b \in \mathbb{R}^m$، $c \in \mathbb{R}^m$ و $d \in \mathbb{R}^q$ و ماترس‌های $A \in \mathbb{R}^{(m\times n)}$ و $B \in \mathbb{R}^{(q\times n)}$ هستند.

$$P: \qquad Z_P = \min \quad c^T x \tag{۱۴.۱}$$

$$\text{s.t.}$$

$$Ax \geq b \tag{۱۵.۱}$$

$$Bx \geq d \tag{۱۶.۱}$$

$$x \geq 0 \tag{۱۷.۱}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}^+ \qquad \forall j \in J \tag{۱۸.۱}$$

بردار ضرایب لاگرانژ $\alpha \geq 0$ را متناظر قید (۱۵.۱) تعریف می‌کند. مساله آزادسازی لاگرانژ متناظر را $SP(\alpha)$ می‌نامد. مدل آن به صورت زیر است.

$$SP(\alpha): \qquad L(\alpha) = \min \quad c^T x + \alpha^T (b - Ax) \tag{۱۹.۱}$$

$$\text{s.t.}$$

$$Bx \geq d \tag{۲۰.۱}$$

$$x \geq 0 \tag{۲۱.۱}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}^+ \qquad \forall j \in J \tag{۲۲.۱}$$

دوگان لاگرانژ مساله P به صورت زیر است. آن را مساله D می‌نامد.

$$D: \qquad Z_D = \max_{\alpha \geq 0} \quad L(\alpha) \tag{۲۳.۱}$$

جفریون مساله جدیدی را به نام P^* به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$P^*: \qquad Z_{P^*} = \min \quad c^T x \tag{۲۴.۱}$$

$$\text{s.t.}$$

$$Ax \geq b \tag{۲۵.۱}$$

$$x \in Conv\{x \geq 0 : Bx \geq d, x_j \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall j \in J\} \tag{۲۶.۱}$$

که در آن $Conv\{S\}$ نشان‌دهنده پوسته محدب مجموعه S است. با توجه به تعاریف بیان شده قضایای زیر را داریم.

قضیه ۲۳.۳.۱. [۳۳]

۱. همواره نامساوی‌های زیر برقرار است.

- $\Omega_P \subseteq \Omega_{P^*} \subseteq \Omega_{\overline{P}}$
- $Z_P \geq Z_{P^*} \geq Z_{\overline{P}}$
- $\Omega_P \subseteq \Omega_{SP(\alpha)} \qquad \forall \alpha \geq 0$
- $Z_P \geq L(\alpha) \qquad \forall \alpha \geq 0$

۲. اگر $\overline{P}$ شدنی باشد، آنگاه $Z_{\overline{P}} \leq L(\overline{\alpha}) \leq Z_D$

۳. اگر برای α داده شده بردار x در سه شرط زیر صدق کند، آنگاه x جواب بهینه مساله P است.

- $Ax \geq b$
- $\alpha^T(b - Ax) = 0$
- x جواب بهینه مساله $SP(\alpha)$ باشد.

۴. اگر P^* شدنی باشد، آن‌گاه $Z_D = Z_{P^*}$

برای بیان قضیه بعد ابتدا تعریف خاصیت عدد صحیح[۱] را بیان می‌داریم.

تعریف ۲۴.۳.۱. فرض کنید $\Omega = \{x : Dx = q, x \in \mathbb{Z}^+\}$. گوییم Ω دارای خاصیت عدد صحیح است اگر، مساله برنامه‌ریزی خطی زیر برای هر بردار با ابعاد مناسب و دلخواه c دارای جواب بهینه با مولفه‌های صحیح باشد.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \\ & Dx = q \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، مولفه‌های هر نقطه گوشه‌ای از فضای $\{x : Dx = q, x \geq 0\}$ صحیح باشد.

با توجه به قضیه ۲۳.۳.۱، مقدار بهینه دوگان لاگرانژ مساله P (یعنی مقدار Z_D) و مقدار بهینه آزادسازی خطی مساله P کران‌های پایینی برای مقدار بهینه مساله P هستند. هم‌چنین، همواره $Z_{\overline{P}} \leq Z_D$ است. قضیه زیر شرایط کافی برای برابری مقدار بهینه دوگان لاگرانژ و مقدار بهینه آزادسازی خطی مساله P را بیان می‌دارد.

قضیه ۲۵.۳.۱. [۳۳] فرض کنید $\overline{P}$ شدنی باشد و $SP(\alpha)$ دارای خاصیت عدد صحیح باشد، آن‌گاه P^* شدنی است و داریم :

$$Z_{\overline{P}} = L(\overline{\alpha}) = Z_D = Z_{P^*}$$

---

[۱] Integrality Property

فصل ۲

مدل‌سازی و ویژگی‌های مساله

۱.۲ مدل‌های ریاضی مساله

گراف جهت‌دار $G = (N, A)$ را در نظر بگیرید. N نشان‌دهنده مجموعه راس‌های گراف و A نشان‌دهنده مجموعه یال‌های جهت‌دار گراف است. هم‌چنین، K مجموعه‌ای از اندیس کالاها، در نظر گرفته شده است. با توجه به مشخصه‌های مساله، مانند محدودیت ظرفیت برای کمان‌ها، محدودیت انتقال برای هر کالا در هر کمان و نوع تابع هزینه، مدل‌های ریاضی متفاوتی برای مساله ارایه می‌شود. این مدل‌ها به دو دسته‌ی کلی مدل‌های گره-کمان[۱] و مسیر-جریان[۲] تقسیم می‌شوند که به ترتیب در بخش‌های ۱.۱.۲ و ۲.۱.۲ بیان خواهیم کرد.

در مدل‌هایی که ارایه می‌شود، اگر $|K| = 1$ فرض شود، آن‌گاه مدل‌های متناظر برای مساله تخصیص جریان شبکه یک کالایی به دست می‌آید.

---

[۱] Node-Arc [۲] Path-Flow

۲.۱.۱ مدل گره-کمان

در این بخش، به ارایه مدل‌های ریاضی گره-کمان برای مساله می‌پردازیم. ابتدا متغیرها و پارامترهایی که در این بخش استفاده خواهد شد، معرفی می‌کنیم.

پارامترها:

D_{ij} : ظرفیت کمان (i,j).

u_{ij}^k : ظرفیت کمان (i,j) برای کالای k.

$SO(k)$: مجموعه اندیس گره‌های مبدا (عرضه) برای کالای نوع kام.

$SD(k)$: مجموعه اندیس گره‌های مقصد (تقاضا) برای کالای نوع kام.

d_i^k : مقدار عرضه یا تقاضا از کالای k در گره i.

هم‌چنین، فرض کنید مجموع میزان عرضه و تقاضا برای هر کالا در شبکه با هم برابر باشد، یعنی

$$\sum_{i\in SO(k)} d_i^k = \sum_{j\in SD(k)} d_j^k \qquad \forall k = 1, 2, \cdots, K \tag{۲.۱}$$

اگر (۲.۱) برقرار نباشد، آن‌گاه می‌توان با اضافه کردن یک گره مصنوعی با مقدار عرضه یا تقاضای مناسب و رسم کمان‌هایی از گره مصنوعی به گره‌های مبدا یا مقصد با هزینه صفر تعادل را در شبکه برقرار کرد.

متغیرها:

w_{ij}^k : مقدار کالای نوع kام که از کمان (i,j) عبور می‌کند.

x_{ij} : مجموع کالای انتقال یافته از کمان (i,j)، یعنی $\sum_{k\in K} w_{ij}^k$.

$g_{ij}(x_{ij})$: تابع هزینه انتقال مجموع کالای عبوری (x_{ij}) از کمان (i,j).

$h^k_{ij}(w^k_{ij})$: تابع هزینه انتقال w^k_{ij} واحد از کالا k در کمان (i,j). به عبارت دیگر، این تابع فقط هزینه مربوط به عبور جریان از کالای k در کمان (i,j) را محاسبه می‌کند.

مدل ۱.۱.۲، ساده‌ترین مدل مساله کمینه کردن تخصیص جریان در شبکه‌های چند کالایی است.

مدل ریاضی ۱.۱.۲ (بدون محدودیت ظرفیت).

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{|K|} h^k_{ij}(w^k_{ij}) + \sum_{(i,j)\in A} g_{ij}\Big(\sum_{k\in K} w^k_{ij}\Big) \tag{۲.۲}$$

s. t.

$$\sum_{j:(i,j)\in A} w^k_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} w^k_{ji} = \begin{cases} d^k_i & i\in SO(k) \\ -d^k_i & i\in SD(k) \\ 0 & o.w. \end{cases} \quad \forall k\in K \quad \forall i\in N \tag{۳.۲}$$

$$w^k_{ij} \geq 0 \qquad \forall k\in K, \forall (i,j)\in A \tag{۴.۲}$$

معمولا در تابع هدف مساله تخصیص جریان در شبکه چند کالایی دو نوع هزینه در نظر گرفته می‌شود، یکی مربوط به هزینه‌ی عبور هر کالا از هر کمان و دیگری مربوط به هزینه عبور تمام کالاها از هر کمان است. به عبارت دیگر، تابع هدف به صورت عبارت (۲.۲) است. ولی در اکثر مطالعات تنها بخش دوم هزینه یعنی، هزینه عبور تمام کالاها از هر کمان، در نظر گرفته می‌شود.
توابع هزینه مقعری که برای هر یال در نظر گرفته می‌شود دارای صورت‌های متفاوتی است. معروف‌ترین آن‌ها که بیشتر در مقالات از آن‌ها استفاده می‌شود، توابعی به فرم زیر هستند [۵۶]:

- تابع هزینه ثابت [۱] که به صورت $c_{ij}x_{ij} + f_{ij}$ است. که در آن به f_{ij} هزینه ثابت گویید. یعنی اگر کمان (i,j) برای انتقال کالا انتخاب شود، ابتدا باید به میزان f_{ij} واحد هزینه پرداخت کنیم. به c_{ij}، هزینه متغیر متناسب با مقدار x_{ij} واحد کالای عبوری از کمان گویند.

[۱] Fixed Charge

- ریشه مرتبه دوم [۱] که به فرم $c_{ij}\sqrt{x_{ij}}$ است. آلتی‌پارماک و همکاران در [۵] از آن استفاده کرده‌اند.

- تابع هزینه چند جمله‌ای مرتبه دوم که به صورت $-a_{ij}x_{ij}^{2} + b_{ij}x_{ij}$ است. به عنوان مثال دانگ و همکاران در [۱۹] از این تابع استفاده کرده‌اند.

- توابع قطعه‌ای خطی مقعر که در فصل ۳ راجع به آن توضیح خواهیم داد.

محدودیت‌های (۳.۲)، به عنوان محدودیت تعادل عرضه و تقاضا برای هر کالا در هر گره شناخته می‌شود. به عبارت دیگر، برای هر کالا تفاضل بین مجموع جریان خروجی و مجموع جریان ورودی به هر گره باید برابر با عرضه یا تقاضای آن گره باشد. محدودیت‌های (۴.۲) نامنفی بودن جریان در هر کمان برای هر کالا را ضمانت می‌کنند.

مدل ریاضی ۲.۱.۲ (با محدودیت ظرفیت).

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k=1}^{|K|} h_{ij}^{k}(w_{ij}^{k}) + \sum_{(i,j)\in A} g_{ij}\Big(\sum_{k\in K} w_{ij}^{k}\Big) \tag{۵.۲}$$

$$\text{s.t.}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} w_{ij}^{k} - \sum_{j:(j,i)\in A} w_{ji}^{k} = \begin{cases} d_i^k & i\in SO(k) \\ -d_i^k & i\in SD(k) \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad \forall k\in K \quad \forall i\in N \tag{۶.۲}$$

$$\sum_{k=1}^{|K|} w_{ij}^{k} \le D_{ij} \qquad \forall (i,j)\in A \tag{۷.۲}$$

$$w_{ij}^{k} \ge 0 \qquad \forall k\in K, \forall (i,j)\in A \tag{۸.۲}$$

مدل ۲.۱.۲، مشابه مدل ۱.۱.۲ است با این تفاوت که کمان‌ها دارای ظرفیت D_{ij} هستند. قیدهای (۷.۲) ارتباط بین جریان کالاهای مختلف بر روی یک کمان (i,j) را نشان می‌دهد. این

[۱] Square Root

محدودیت سبب پیچیده‌تر شدن حل مساله شبکه‌ی چند کالایی می‌شود، زیرا در غیاب این قید می‌توان مساله را برای هر کالای k، جداگانه در نظر گرفت.

در بعضی از مساله‌ها مقدار کالای عبوری از هر کمان نیز دارای محدودیت است یعنی، قیدهای $w_{ij}^k \leq u_{ij}^k$ برای هر کالای k و هر کمان (i,j) به محدودیت‌های مساله اضافه می‌شود. هرچند که در این نوع مساله‌ها، این قید به صورت ضمنی در نظر گرفته می‌شود.

اگر ماتریس ضرایب مربوط به قیود تعادل عرضه و تقاضا (قیود (۳.۲) یا (۶.۲)) را برای هر کالا تشکیل دهیم، آن‌گاه هر سطر ماتریس متناظر با یک گره و هر ستون متناظر با یک کمان از شبکه است. به همین دلیل به مدل‌های ۱.۱.۲ و ۲.۱.۲ مدل‌های گره-کمان گویند. مولفه‌های ماتریس مقادیر ۱−، ۰ یا ۱ می‌گیرند و در هر ستون حداکثر دو مولفه‌ی ناصفر داریم. به بیان دیگر، محدودیت (۳.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$GW^k = d^k \qquad\qquad \forall k \in K \tag{۹.۲}$$

که در آن $W^k = (w_{ij}^k)^T$ برداری m بعدی است که m تعداد کمان‌ها است. هم‌چنین، $d^k = (d_i^k)^T$ برداری n بعدی است که n تعداد گره‌ها است و $G = (g_{ie})$ ماتریس برخورد[۱] $n \times m$ بعدی است. اگر $j \in N$ موجود باشد که $e = (i,j)$، آن‌گاه $g_{ie} = ۱$ و اگر $e = (j,i)$، آن‌گاه $g_{ie} = -۱$ و در غیر این صورت، $g_{ie} = ۰$ است.

قضیه ۱.۱.۲. [۱۳] فرض کنید $GW^k = d^k$ نمایش ماتریسی قیود تعادل جریان مربوط به کالای k باشد. بردار جریان $\widehat{W}^k$ یک جواب پایه برای دستگاه $\Omega = \{W^k : GW^k = d^k, W^k \geq ۰\}$ است، اگر و تنها اگر، مولفه‌های غیرصفر بردار $\widehat{W}^k$ یک درخت در گراف مساله تشکیل دهند.

نتیجه ۲.۱.۲. [۶۵] اگر کالای k در گراف مساله دارای یک گره مبدا و یک گره مقصد باشد، آن‌گاه جواب پایه‌ای متناظر با این کالا، مسیری بین گره مبدا و گره مقصد در گراف مساله است.

نتیجه ۳.۱.۲. [۶۸] با توجه به این که در مساله تخصیص جریان در شبکه چندکالایی بدون محدودیت

[۱] Incidence Matrix

ظرفیت، متناظر با هر کالا قیود تعادل جریان مجزا داریم. بنابراین، در هر جواب پایه‌ای برای مساله، بردار جریان متناظر با هر کالا یک درخت در گراف مساله را تشکیل می‌دهند.

نتیجه ۴.۱.۲. [۷۱] مساله کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه‌های چند کالایی با تابع هزینه مقعر بدون محدودیت ظرفیت جز مساله‌های بهینه‌سازی با تابع هزینه مقعر بر روی فضای محدب و کران‌دار است. بنابراین، با توجه به قضیه ۱۳.۳.۱ و نتیجه ۳.۱.۲ جواب بهینه مساله برای هر کالا یک درخت در گراف مساله است. اما پیدا کردن همه درخت‌ها در گراف مساله دارای پیچیدگی زمانی از مرتبه نمایی است.

۲.۱.۲ مدل مسیر-جریان

به منظور سهولت بیان مدل مسیر-جریان، برای هر نوع کالا تنها یک جفت مبدا و مقصد در نظر می‌گیریم، که به صورت زوج مرتب (s^k, t^k) نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که، اگر مساله برای کالای k بیش از یک گره مبدا یا مقصد داشت آن‌گاه دو گره مصنوعی s^k و t^k به مساله اضافه می‌کنیم. به طوری که، مقدار عرضه گره s^k برابر با مجموع عرضه همه گره های مبدا و مقدار تقاضای گره t^k برابر با مجموع تقاضای همه‌ی گره‌های مقصد است. سپس کمان‌هایی مصنوعی از گره‌های مبدا کالای k به گره s^k و از گره‌های مقصد کالای k به گره t^k با تابع هزینه صفر رسم می‌کنیم. به طوری که، ظرفیت هر کمان مصنوعی برابر با مقدار عرضه یا تقاضای گره مبدا یا مقصد متصل به آن باشد. در این حالت مساله‌ای معادل با یک گره مبدا و یک گره مقصد برای کالای k داریم.

پارامترها

N^k : مجموعه مسیرهای بین (s^k, t^k).

فرض بر این است که، برای هر کالا همه مسیرها ازمبدا به مقصد از قبل مشخص است. هم‌چنین، هر مسیر می‌تواند تنها متعلق به یک N^k باشد. یعنی $N^k \cap N^{k'} = \emptyset$ برای هر

$k, k^{'} \in K$ و $k \neq k^{'}$.

$\pi_p^k(i,j)$: اگر کمان (i,j) کمانی از مسیر pام کالای k باشد، مقدار آن یک و در غیر این صورت، مقدارش صفر است.

d^k : مقدار کالای k که باید از مبدا s^k به مقصد t^k ارسال شود.

D_{ij} : میزان ظرفیت کمان (i,j).

$u_{i,j}^k$: میزان ظرفیت کمان (i,j) برای کالای k.

متغیرها:

x_p^k : مقدار کالای kام که از مسیر $p \in N^k$ ارسال می‌شود

مانند مدل‌های گره-کمان فرض بر این است که رابطه (۱.۲) برقرار است. یعنی، مجموع عرضه با مجموع تقاضا برای هر کالا برابر است.

مدل ریاضی ۳.۱.۲ (با محدودیت ظرفیت).

$$\min \quad \sum_{k=1}^{|K|} \sum_{(i,j)\in A} h_{ij}^k \Big(\sum_{p\in N^k} \pi_p^k(i,j) x_p^k\Big) + \sum_{(i,j)\in A} g_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{|K|} \sum_{p\in N^k} \pi_p^k(i,j) x_p^k\Big) \tag{۱۰.۲}$$

s. t.

$$\sum_{p\in N^k} x_p^k = d^k \qquad \forall k \in K \tag{۱۱.۲}$$

$$\sum_{k=1}^{|K|} \sum_{p\in N^k} \pi_p^k(i,j) x_p^k \leq D_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \tag{۱۲.۲}$$

$$x_p^k \geq 0 \qquad \forall k \in K \quad \forall p \in N^k \tag{۱۳.۲}$$

تعریف تابع هدف مشابه تعریف ارایه شده برای مدل‌های گره-کمان (صفحه ۳۴) است. محدودیت‌های (۱۱.۲)، برآورده شدن تقاضای کالای k در گره مقصد t^k را ضمانت می‌کنند.

محدودیت‌های (۱۲.۲)، ضمانت می‌کند که مجموع جریان عبوری از هر کمان از ظرفیت آن کمان تجاوز نکند.

اگر مقدار جریان عبوری برای کالای k در کمان (i,j) دارای محدودیت ظرفیت باشد قید زیر نیز به مساله اضافه می‌شود.

$$\sum_{p\in N^k} \pi_p^k(ij)x_p^k \leq u_{i,j}^k \qquad \forall k \in K, \quad \forall (i,j) \in A \qquad (۱۴.۲)$$

برای استفاده از مدل ۳.۱.۲، باید همه‌ی مسیرهای بین گره‌های مبدا و مقصد هر کالا را از قبل پیدا کرده باشیم. حالت کلی الگوریتم پیدا کردن همه مسیرها در یک گراف دارای پیچیدگی زمانی از مرتبه نمایی است. الگوریتم‌هایی برای پیدا کردن این مسیرها معرفی شده است. به عنوان نمونه می‌توان به الگوریتم تولید ستون[۱] که توسط لونتال و همکاران [۵۳] ارایه شده است، اشاره کرد.

۲.۲ مشخصه‌های مساله

مشخصه‌های مساله کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه با تابع هزینه مقعر که از مساله‌ای به مساله‌ی دیگر می‌تواند متفاوت باشد (که این بر پیچیدگی و روش حل مساله تاثیرگذار می‌گذارد) به شرح زیر است [۳۵]:

۱. تعداد گره‌ها

۲. چگالی[۲] : متوسط تعداد کمان‌های متصل به هر گره

۳. ساختار[۳] شبکه: ساختار شبکه می‌تواند شامل مواردی نظیر شبکه‌های بدون دور[۴] و شبکه‌های مرحله‌ای[۵] باشد.

[۱]Column Generation [۲]Density [۳]Structure [۴]Acyclic Network [۵]Stage Network

۴. ظرفیت کمان‌ها[۱] : کمان‌ها می‌توانند دارای محدودیت ظرفیت یا بدون محدودیت ظرفیت باشند.

۵. نوع تابع هدف : تابع هدف می‌تواند به صورت هزینه ثابت، قطعه‌ای مقعر[۲] و یا یک تابع مقعر دلخواه باشد.

۶. تعداد نقاط مبدا هر کالا

۷. تعداد نقاط مقصد هر کالا

۸. تعداد نوع کالا [۳] که باید در شبکه بین گره‌های مبدا و مقصد جابه‌جا شود.

۳.۲ پیچیدگی زمانی مساله

در [۳۵]، اثبات شده است که مساله کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه با تابع هزینه مقعر یک مساله از نوع NP-Hard است. حتی نخستین حالت آن یعنی، مساله کمینه تخصیص جریان در شبکه چند کالایی با یک گره مبدا، بدون ظرفیت[۴] و با تابع هدف هزینه ثابت یک مساله NP-Hard است [۲۶].

۴.۲ مروری بر روش‌های حل مساله تخصیص جریان در شبکه با تابع هدف غیرخطی و مقعر

مساله‌های کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه با توجه به نوع تابع هزینه کمان‌ها، معمولا به چهار دسته توابع خطی، محدب، مقعر و غیرخطی کلی تقسیم‌بندی می‌شوند. مساله‌ها با تابع

[۱] Arcs Capacities [۲] Piecewise Concave [۳] Commodity [۴] Uncapacitated

هزینه خطی برای هر کمان ساده‌ترین حالت، و دارای الگوریتم‌هایی با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای هستند [۱۲]. مساله‌ها با تابع هزینه محدب برای هر کمان در دسته مساله‌های برنامه‌ریزی محدب قرار می‌گیرد. لذا هر جواب بهینه محلی یک جواب بهینه سراسری است. مساله‌ها با تابع هزینه مقعر غیرکاهشی سخت‌تر از دو حالت گذشته است. پیچیدگی و سختی این نوع مساله به علت کمینه کردن یک تابع هدف مقعر بر روی یک فضای جواب شدنی محدب است. در نتیجه جواب بهینه محلی لزوما یک جواب بهینه سراسری نیست. در بخش ۳.۲ درباره پیچیدگی محاسباتی این مساله بحث کردیم. مساله‌ها با تابع هزینه غیرخطی در حالت کلی، نه مقعر و نه محدب هستند و حل آن سخت‌تر از سه حالت گذشته است، زیرا رفتار تابع به راحتی قابل پیش‌بینی نیست [۲۳]. در این بخش، روش‌های حل معرفی شده برای مساله تخصیص جریان در شبکه با تابع هزینه مقعر یا غیرخطی برای هر کمان را مروری می‌کنیم. این مساله‌ها را در دو دسته یک کالایی و چندکالایی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۴.۲ مساله‌های چندکالایی

کارهای تحقیقاتی که بر روی مساله تخصیص جریان در شبکه چندکالایی با تابع هزینه غیرخطی صورت گرفته به ترتیب زمانی، به شرح زیر است.

زنگویل اولین شخصی است که در سال ۱۹۶۸ مساله کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه چندکالایی را معرفی کرده است. وی در [۷۱]، حالت‌های مختلف مساله تخصیص جریان در شبکه‌های یک و چند کالایی با تابع هدف غیرخطی و کاربردهایش را مرور کرده است. وی ابتدا نشان می‌دهد جواب بهینه مساله در نقاط گوشه‌ای فضای جواب شدنی ظاهر می‌شود. در ادامه الگوریتمی بر پایه برنامه‌ریزی پویا برای حل مساله یک کالایی با یک گره مبدا و چند گره مقصد معرفی می‌کند. در بخش بعدی مقاله، شبکه‌های چندکالایی بدون محدودیت ظرفیت بر روی یال‌ها و با یک گره مبدا را بررسی می‌کند. سپس با کمک الگوریتم معرفی شده برای حل مساله یک کالایی، الگوریتمی برای حل مساله چند کالایی ارایه می‌دهد.

کلیزیگ در [۴۹]، مساله‌های تخصیص جریان در شبکه‌های چند کالایی با تابع هزینه‌ی غیرخطی را مورد بررسی قرار داده است. وی گراف شبکه را بدون جهت در نظر گرفته و مدل مسیر-جریان را برای آن ارایه کرده است. وی ابتدا نشان می‌دهد که اگر $f(X)$ تابع هدف، Ω فضای شدنی و X^* جواب بهینه‌ی مساله باشد، آنگاه $\min\{\nabla f(X^*)^T(X-X^*)|X\in\Omega\}=0$ (شرط گرادیان). سپس الگوریتمی برای پیدا کردن نقاطی که در شرایط لازم بهینگی صدق می‌کند، ارایه می‌دهد.

اسد در [۷]، مساله تخصیص جریان در شبکه‌های چند کالایی را مرور کرده است. او مقاله خود را در پنج بخش تنظیم کرده است. در چهار بخش اول، به معرفی شبکه‌های چندکالایی خطی و غیرخطی، انواع مدل‌های ریاضی مساله و کاربردهای مساله پرداخته است. سپس روش‌های تجزیه[۱]، تولید ستون[۲] و افرازبندی مساله‌ی اولیه[۳] را معرفی کرده است و برای هر روش افرادی که در مقالات خود از آن روش در حل مساله تخصیص جریان در شبکه چند کالایی با تابع هدف خطی استفاده کرده‌اند، معرفی نموده است. در بخش آخر، نیز به بررسی تخصیص جریان در شبکه‌های چند کالایی با تابع هزینه غیرخطی پرداخته است. او ابتدا روش‌های کلی حل یک مساله‌ی غیرخطی مانند روش پیدا کردن جهت شدنی[۴]، الگوریتم تقریب خطی[۵]، روش معادل‌سازی[۶]، کاهش گرادیان[۷] و تصویر گرادیان[۸] را معرفی کرده است. سپس پژوهشگرانی که از این روش‌ها برای حل مساله تخصیص جریان در شبکه‌های چندکالایی با تابع هزینه غیرخطی استفاده کرده‌اند، معرفی نموده است.

بالاکریشنان و گریوز در [۹]، مساله تخصیص جریان در شبکه‌های چندکالایی با تابع هزینه‌ی مقعر را بررسی کرده‌اند. آن‌ها هزینه‌ی جریان کالا در هر کمان را یک تابع قطعه‌ای خطی[۹] مقعر فرض کرده‌اند. سپس یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط[۱۰] برای مساله ارایه کردند. آن‌ها از یک الگوریتم ابتکاری برای حل مساله استفاده کردند. الگوریتم آن‌ها از ترکیب روش‌های آزادسازی

---

[۱] Decomposition [۲] Column Generation [۳] Primal Partitioning [۴] Feasible Direction Approach [۵] Linear Approximation [۶] Equilibration Approach [۷] Reduced Gradient Method [۸] Gradient Pro-jection Method [۹] Piecewise Linear [۱۰] Mixed Integer Programming

لاگرانژ[۱] ، فراز دوگان[۲] و بهینه‌سازی زیرگرادیان[۳] به دست آمده است. توضیحات کامل‌تر روش آن‌ها را در بخش ۱.۳ بیان خواهیم کرد.

نبائو و وردیجو در [۵۹]، روش تجزیه‌ی دنتزیگ-ولف را برای مساله تخصیص جریان در شبکه‌ها چند کالایی با تابع هدف غیرخطی به کار برده‌اند.

بازلاماکی و هیندی [۱۱]، با استفاده از الگوریتم جست‌وجوی ممنوع[۴] یک الگوریتم ابتکاری برای جست‌وجوی نقاط گوشه‌ای مجاور در شبکه‌های چندکالایی، بدون محدودیت ظرفیت با تابع هزینه مقعر ارایه کردند.

امیری و پیرکول [۶]، به بررسی تخصیص جریان در شبکه‌های چند کالایی پرداختند. آن‌ها هزینه‌های هر یال را در دو حالت تابع قطعه‌ای غیرخطی مقعر و تابع قطعه‌ای خطی مقعر مورد بررسی قرار دادند. هم‌چنین، یک روش برنامه‌ریزی ریاضی[۵] بر پایه‌ی استفاده از آزادسازی لاگرانژ ارایه کردند. آن‌ها مدعی شدند که در این روش نتایج عددی بهتری نسبت به روش بالاکریشنان و گریوز [۹] به دست آورده است. توضیحات کامل‌تر روش آن‌ها را در بخش ۲.۳ بیان خواهیم کرد.

موریل و منشی در [۵۸]، مساله‌ی تخصیص جریان در شبکه‌های چندکالایی با تابع هزینه‌ی مقعر و محدودیت ظرفیت انتقال کالا برای هر یال را مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها نشان می‌دهند کران پایین به دست آمده از روش لاگرانژ بهتر از کران پایین بدست آمده از روش آزادسازی برنامه‌ریزی خطی[۶] نیست. بر این اساس، روش ابتکاری برپایه‌ی آزادسازی برنامه‌ریزی خطی (LPR) ارایه کرده‌اند.

بابانئو در [۸]، شبکه‌های چند کالایی با تابع هدف خطی و غیر خطی را بررسی کرده است. وی پس از معرفی مساله کاربردهای آن را در شبکه‌های مخابراتی، تخصیص رفت و آمد[۷] حمل و نقل، مسیریابی و انبار محصولات فصلی بیان و انواع مدل‌بندی ریاضی مساله را معرفی می‌کند.

---

[۱] Lagrangian Relaxation [۲] Dual Assent [۳] Subgradient Optimization [۴] Tabu Search [۵] Mathematical Programming [۶] Linear Programming Relaxation(LPR) [۷] Traffic Assignment

سپس در بخش‌های بعد انواع روش‌های اولیه مانند تجربه دنزیگ و ولف، فرانک و ولف، تجزیه‌ی سیمپلیکال[۱] (ترکیبی از روش دنزیگ–ولف و فرانک–ولف برای حل مساله‌های محدب است) و انواع روش‌های دوگان[۲] مانند آزادسازی لاگرانژ و آزادسازی لاگرانژ افزوده[۳] (ترکیبی از روش آزادسازی لاگرانژ و روش جریمه‌ی بیرونی[۴] است) به همراه کارهای تحقیقاتی که با استفاده از این روش‌ها برای مساله‌ی تخصیص جریان در شبکه‌های چند کالایی با تابع هدف خطی یا غیرخطی مورد استفاده قرار گرفته، معرفی کرده است.

مگننتی و همکاران در [۵۵]، شبکه‌های چندکالایی با تابع هزینه قطعه‌ای خطی مقعر را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها مدلی بر پایه تجزیه جریان در هر کمان ارایه کردند. سپس مدل ارایه شده را به روش آزادسازی خطی حل کرده و با معرفی نامساوی‌های معتبر مناسب کران‌های پایین تولید شده از حل آزادسازی خطی مساله را بهبود بخشیدند. توضیحات کامل‌تر روش آن‌ها را در بخش ۳.۳ بیان خواهیم کرد.

۲.۴.۲ مساله‌های یک کالایی

با توجه به این که تمرکز این پژوهش بر روی مساله تخصیص جریان در شبکه چندکالایی است. لذا برای مساله تخصیص جریان در شبکه با یک کالا و با تابع هزینه مقعر یا غیرخطی، فقط خلاصه‌ای از پژوهش‌های صورت گرفته براساس روش حلشان را در جدول ۱.۲ بیان کرده‌ایم.

روش‌های دقیق	روش‌ها بر پایه الگوریتم ابتکاری	روش‌ها بر پایه الگوریتم فراابتکاری
[۲۰، ۲۲، ۲۸، ۳۲، ۵۱] [۱۵، ۲۵، ۲۹، ۵۲]	[۱۸، ۲۴، ۳۱، ۳۶–۳۸]	[۵، ۱۹، ۲۷، ۵۷، ۶۴، ۶۹]

جدول ۱.۲: خلاصه روش‌های حل مساله یک کالایی با تابع هزینه مقعر یا غیرخطی

در جدول ۲.۲، تحقیقاتی که بر روی مساله کمینه کردن هزینه تخصیص جریان در شبکه یک کالایی با تابع هزینه ثابت انجام شده است، معرفی کرده‌ایم.

[۱]Simplical [۲]Dual [۳]Augmented Lagrangian Relaxation [۴]Exterior Penalty

روش‌های دقیق	روش‌ها بر پایه الگوریتم ابتکاری	روش‌ها بر پایه الگوریتم فراابتکاری
[۳، ۳۴، ۴۲، ۴۳، ۴۶، ۴۸]	[۴۴، ۴۷، ۶۰، ۶۱، ۶۳]	[۴۵، ۶۶]

جدول ۲.۲: خلاصه روش‌های حل مساله یک کالایی با تابع هزینه ثابت