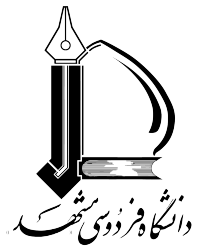

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
تحقیق در عملیات

عنوان

حل مساله مکان یابی پایانه های اتوبوس رانی با استفاده از مساله تحلیل پوششی داده ها با رویکرد برنامه ریزی چند هدفه

نگارنده
عاطفه تقوی

تابستان۱۳۹۷

فهرست مطالب

پیش‌گفتار ۷

۱ مروری بر مسایل مکان‌یابی تسهیلات و تحلیل پوششی داده‌ها ۹

۱.۱ مقدمه ۹

۲.۱ معرفی مساله مکان‌یابی تسهیلات ۱۱

۳.۱ معرفی مساله تحلیل پوششی داده‌ها ۱۴

۱.۳.۱ مدل‌بندی مساله تحلیل پوششی داده‌ها ۲۲

۲.۳.۱ تجمیع هم‌زمان مدل تحلیل پوششی داده‌ها ۲۴

۳.۳.۱ مروری بر کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها ۲۵

۲ مدل ادغامی از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها و مکان‌یابی تسهیلات ۲۷

۱.۲ مقدمه ۲۷

۲.۲ مفهوم ادغام کارایی در مکان‌یابی ۲۸

۳.۲ حل مدل مکان‌یابی تسهیلات با دو هدف هزینه و کارایی ۲۹

۱.۳.۲ مدل‌های ادغامی $UFSD$ و $CASD$ ۳۰

۴.۲ مثال ۳۵

۳ آشنایی با مساله مکان‌یابی پایانه‌های اتوبوس‌رانی وادغام آن با مدل DEA ۴۱

۱.۳ مقدمه ۴۱

۲.۳ مدل‌بندی مساله مکان‌یابی پایانه‌های اتوبوس‌رانی ۴۳

۱.۲.۳ تعریف داده‌ها ۴۴

۲.۲.۳ تعریف همسایگی‌ها ۴۴

۳.۲.۳ تعریف متغیرها ۴۵

۳.۳ مدل ادغامی مساله‌های $BTLP$ وDEA ۴۷

۴ الگوریتم ژنتیک پیشنهادی ۵۰

۱.۴ مقدمه ۵۰

۲.۴ الگوریتم ژنتیک ۵۱

۳.۴ الگوریتم ژنتیک پیشنهادی برای حل مدل ادغامی $BTLP$و DEA ۵۲

۵ نتایج عددی ۵۷

۱.۵ نتیجه‌گیری ۵۹

مراجع ۶۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۵

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۶۶

نمایه ۶۹

فهرست الگوریتم‌ها

۱ الگوریتم ژنتیک پیشنهادی ۵۵

فهرست شکل‌ها

۱.۲ افزایش بهره‌وری با رویکرد ورودی‌محور ۲۸

۲.۲ افزایش بهره‌وری با رویکرد خروجی‌محور ۲۹

۳.۲ موقعیت مکان‌های مراکز تسهیلات و نقاط تقاضا ۳۵

۴.۲ جواب مینیمم هزینه در مدل UFSD ۳۸

۵.۲ جواب ماکسیمم کارایی در مدل UFSD ۳۹

۶.۲ بهترین جواب در ۱۰۰ تکرار ۳۹

فهرست جدول‌ها

۱.۲ نمرات کارایی بدست آمده به ازای هر جفت مرکز و تقاضا ۳۶

۲.۲ نتایج حل مدل UFSD ۳۸

۳.۲ نتایج حل مدل CASD ۴۰

۱.۵ نتایج الگوریتم ژنتیک روی نمونه $n = ۱۵$ ۵۸

۲.۵ نتایج الگوریتم ژنتیک روی نمونه $n = ۲۵$ ۵۹

پیش‌گفتار

از دیرباز نقش حمل‌ونقل شهری در توسعه و رشد شهرها قابل توجه بوده است. بر این اساس یکی از عوامل مهم شهرنشینی و گسترش شهرها، دسترسی مناسب به سیستم‌های حمل‌ونقل بوده است. در میان انواع حمل‌ونقل درون شهری نقش اتوبوس‌رانی برجسته‌تر از سایر روش‌هاست که به علت سرمایه‌گذاری کم و ارایه خدمات بسیار، از سایر روش‌ها متمایز شده است. با توجه به این‌که خطوط اتوبوس‌رانی بیشترین نقش و سهم را در حمل‌ونقل درون شهری کشور ما دارند، باید از کارایی لازم برخوردار باشند و بتوانند بیشترین و بهترین خدمات را به شهروندان ارایه بدهند. این خدمات‌رسانی باید ایمن، ارزان، سریع، و مطلوب باشد. بنابراین طراحی یک شبکه اتوبوس‌رانی بهینه و کارا با هدف بهبود وضعیت حمل‌ونقل عمومی از اهمیت فراوانی برخوردار است. یکی از گام‌های مهم در این راستا، تعیین تعداد و مکان‌های بهینه‌ی پایانه‌های اتوبوس‌رانی است به طوری که الگوهای تخصیص کارا برای تخصیص ایستگاه‌های متقاضی به پایانه‌ها، را هم داشته باشیم. در این‌جا، توجه ویژه ما به مساله‌های مکان‌یابی پایانه‌های اتوبوس‌رانی ($BTLP$) و مساله تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) است. با ادغام هم‌زمان این دو مساله تأثیرگذاری مکان پایانه‌ها بر کارایی آن‌ها در سرویس‌دهی به ایستگاه‌ها نیز مورد توجه قرار می‌گیرد. از طرفی با توجه به NP-سخت بودن $BTLP$، که به عنوان حالت خاصی از مساله مکان‌یابی تسهیلات شناخته شده است، معمولاً حل دقیق آن برای شهرهای بزرگ بسیار پیچیده و زمان‌بر است. بنابراین برآن شدیم تا برای حل مدل ادغامی $BTLP$ و DEA، الگوریتم فراابتکاری بر مبنای ژنتیک طراحی کنیم، و در نهایت با آوردن نتایج عددی در فصل آخر این پایان‌نامه کارایی الگوریتم پیشنهادی خود را بسنجیم.

این پایان‌نامه به صورت زیر سازمان‌دهی شده است:

در فصل اول، به بیان تعاریف و مقدماتی جهت آشنایی با مسایل مکان‌یابی تسهیلات و تحلیل پوششی داده‌ها می پردازیم.

در فصل دوم، مدل ادغامی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها و مکان‌یابی تسهیلات را ارایه می‌کنیم و در مثالی کارایی آن را نشان می‌دهیم.

در فصل سوم، ابتدا مساله مکان‌یابی پایانه‌های اتوبوس‌رانی را شرح می‌دهیم سپس مدل ادغامی آن را با مساله تحلیل پوششی داده‌ها بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم، ابتدا به توضیح الگوریتم فراابتکاری ژنتیک می‌پردازیم و در نهایت الگوریتم ژنتیک پیشنهادی خود را برای حل مدل ادغامی $BTLP$ و DEA بیان می‌کنیم.

در فصل پنجم، نتایج عددی الگوریتم پیشنهادی خود را روی مجموعه داده‌های تصادفی ارایه خواهیم کرد.

فصل ۱

مروری بر مسایل مکان‌یابی تسهیلات و تحلیل پوششی داده‌ها

۱.۱ مقدمه

در پژوهش‌های حوزه مکان‌یابی، تاکنون انواع زیادی از مسایل مکان‌یابی-تخصیص بررسی شده‌اند تا بهترین الگوی مکانی تسهیلات را با توجه به معیارهای مختلفی از جمله هزینه، پوشش تقاضا، زمان و ...پیدا کنند. برخی از این مدل‌ها در چهارچوب برنامه‌ریزی چندهدفه فرموله شده‌اند تا در بین اهداف نوعاً متناقض به تعادلی دست یابند. به تازگی مفهوم کارایی[۱]تسهیلات به گونه‌ای که در تحلیل پوششی داده‌ها[۲](DEA) مطرح می‌شود، به عنوان یکی دیگر از اهداف مکان‌یابی مطرح شده است، تأثیرگذاری مکان تسهیلات بر کارایی آنها در سرویس‌دهی به تقاضاها نیز در مساله لحاظ شود. در پژوهش‌های حوزه سنجش کارایی، کاربردهایی از تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی کارایی الگوهای مکانی وجود داشته است. یکی از کاربردهای DEA

[۱] Efficiency
[۲] Data Envelopment Analysis

در زمینه مکان‌یابی، در مکان‌یابی تجهیزات بلند مدت پزشکی بوده است. که مساله خود را به عنوان یک ارزیابی مقایسه‌ای مکانی توصیف کرده‌اند و از DEA برای سنجش کارایی نسبی مناطق جغرافیایی، جهت استقرار تسهیلات بلند مدت پزشکی استفاده کرده‌اند [۱۸]. و از کاربردهای دیگر، مکان‌یابی شعبه‌های یک آژانس خدماتی بوده است. که یک سیستم پشتیبان تصمیم برای طراحی مکان مراکز خدماتی ارائه شده است. در این سیستم از DEA برای ارزیابی کارایی شعبه‌های یک آژانس خدماتی استفاده می‌شود. امتیازات به‌دست آمده از DEA در یک مدل برنامه‌ریزی مختلط عدد صحیح وارد می‌شود تا معلوم شود، کدام شعبه باید باز شود و چه ظرفیتی باید به آن تخصیص یابد [۱۸]. کاربردهایی که اشاره شد، بیشتر در ادبیات اقتصاد و کارایی‌سنجی بوده است و صرفاً از DEA برای ارزیابی کارایی مکان‌های مختلف استفاده شده است. به عبارت دیگر از مدل‌های ریاضی مکان‌یابی که در ادبیات پژوهش‌های مکان‌یابی توسعه داده شده است، استفاده نشده است. لذا تاکنون این دو معیار کارایی (کارایی مکانی و کارایی تسهیلات)، به‌طور جداگانه در ادبیات مکان‌یابی و اقتصاد به طور گسترده مطالعه شده است. این در حالی است که مدل‌های مکان‌یابی و تحلیل پوششی داده‌ها می‌توانند مکمل هم باشند و به همراه هم اطلاعات بیشتری برای تصمیمات مکان‌یابی فراهم کنند. در این پژوهش این دو هدف به طور هم‌زمان برای مساله مکان‌یابی تسهیلات[۱] به‌کار رفته است. یعنی این مساله مکان‌یابی با دو هدف کارایی مکانی (با تابع هدف حداقل هزینه) و کارایی تسهیلات (شاخص تحلیل پوششی داده‌ها) مدل‌سازی و حل شده است تا علاوه بر مکان‌های بهینه برای تاسیس تسهیلات، الگوهای تخصیص کارا، را هم داشته باشیم. این رویکرد را رویکرد برنامه‌ریزی چند هدفه می‌نامیم.

در این‌جا دو حالت متداول از مساله مکان‌یابی تسهیلات را بررسی می‌کنیم: مساله مکان‌یابی تسهیلات بدون ظرفیت[۲] $(UFLP)$ و دیگری مساله مکان‌یابی تسهیلات با محدودیت ظرفیت[۳] $(CFLP)$.

از سوی دیگر، جهت حل مشکلات ترافیکی و مسایل اقتصادی-اجتماعی و زیست‌محیطی ناشی از آن در شهرهای بزرگ، نیازمند یک سیستم حمل‌ونقل عمومی مجهز و کارآمد هستیم. از آن‌جایی که عمده‌ترین قسمت سیستم حمل‌ونقل عمومی در کشورهای در حال توسعه را شبکه اتوبوس‌رانی شهری تشکیل می‌دهد. بنابراین طراحی بهینه شبکه اتوبوس‌رانی به‌عنوان یکی از مسایل مکان‌یابی، به بهبود هر چه بیشتر این سیستم کمک می‌کند. وجود مشکلات و اختلالاتی در سیستم حمل‌ونقل اتوبوس‌رانی، باعث کاهش سطح خدمت و ناکارایی سیستم و در نتیجه کاهش تقاضا برای آن خواهد شد. از جمله این مشکلات

[۱] Facility Location Problem
[۲] Uncapacitated Facility Location Problem
[۳] Capacitated Facility Location Problem

می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

عدم دسترسی مناسب به سیستم، عدم تطابق خطوط با مسیرهای خواسته شده، زیاد بودن تعداد تعویض خطوط، زمان انتظار طولانی، فاصله نامنظم بین ورود اتوبوس‌ها و به‌دنبال آن افزایش انتظار، عدم وجود ظرفیت کافی متناسب با نقاط خطوط. این مشکلات را می‌توان ناشی از کمبود امکانات و منابع، برنامه‌ریزی نامناسب برای تخصیص منابع و زمان‌بندی و مدیریت دانست. اما از طرفی اضافه کردن امکانات و منابع به تنهایی راه بهبود سیستم و افزایش تقاضای آن نیست، بلکه در کنار آن، اصلاح سیستم و استفاده بهینه از منابع، می‌تواند در ایجاد یک سیستم کارآمد موثر باشد. لازمه این بهبود یک برنامه‌ریزی مناسب با حداکثر کارایی برای سیستم حمل‌ونقل اتوبوس‌رانی است. در این جا، توجه ویژه ما به مساله مکان‌یابی پایانه‌های اتوبوس‌رانی[۱] $(BTLP)$ با هدف تعیین مکان پایانه‌های موردنیاز و تخصیص ایستگاه‌های متقاضی به آن‌ها است. به گونه‌ای که علاوه بر مکان‌های بهینه برای استقرار پایانه‌ها، الگوهای تخصیص کارا برای تخصیص ایستگاه‌های متقاضی به پایانه‌ها، را هم داشته باشیم. ما در این پایان‌نامه برای مساله $BTLP$ از مدلی که در مرجع [۲] بیان شده است، استفاده می کنیم. این مدل به نوعی تصحیح مدل ارایه شده توسط قنبری و مهدوی امیری [۲۱] است، که در فصل سوم به توضیح آن می‌پردازیم.

۲.۱ معرفی مساله مکان‌یابی تسهیلات

مکان‌یابی فرآیندی است که از طریق آن می‌توان بر اساس شرایط تعیین شده، بهترین محل مورد نظر را جهت سرویس‌دهی بهینه به مشتری‌ها تعیین کرد. هدف از مساله، کمینه کردن تابعی است که متناسب با شرایط مساله تعریف می‌شود.

تا جایی که می‌دانیم، زمان پیدایش مساله مکان‌یابی به اوایل قرن هفدهم و مساله‌ای که توسط فرما[۲] مطرح شد، برمی‌گردد. مساله‌ای که فرما مطرح کرد بدین صورت است: فرض کنید سه نقطه در صفحه داده شده است، نقطه چهارم را به گونه‌ای بیابید که مجموع فاصله آن تا سه نقطه داده شده کمینه گردد. توریچلی[۳] در سال ۱۶۴۰ این مساله را حل کرد و از این رو نام نقطه بهینه را توریچلی گذاشتند. نظریه مکان‌یابی اولین بار توسط ون تانن[۴] در سال ۱۸۲۶ در زمینه فعالیت‌های کشاورزی بیان شد. و با کار لانهارد در سال های ۱۸۸۲ تا ۱۸۸۵ در صنعت مطرح شد. اما آلفرد وبر[۵] آلمانی در سال ۱۹۰۹ [۳۵] به این نظریه رنگ و بوی

[۱] Bus Terminal Location Problem
[۲] Fermat
[۳] Forricell
[۴] VonThunen
[۵] AlfredWeber

علمی بخشید. در واقع نظریه مکان‌یابی مدرن به شکلی که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد، با انتشار کتاب وبر مطرح شد. از آن پس دانشمندان بسیاری، مطالعاتی را در زمینه مکان‌یابی انجام دادند. حکیمی[۱] در سال ۱۹۶۴ [۲۲] تابع هدف را به صورت کمترین مجموع و مینیماکس طبقه بندی کرده و به مساله مکان‌یابی روی شبکه پرداخته است. در سال‌های اخیر، برمن[۲] و درنزر[۳] در سال ۲۰۰۷ [۱۵] مساله مکان‌یابی چند سرویس‌دهنده را با هدف مینیمم‌سازی مجموع زمان سفر و متوسط زمان صرف شده برای مشتری‌ها بررسی کردند. و در سال ۲۰۰۹ [۱۳] همین مساله را با هدف مینیمم‌سازی بیشترین زمان صرف شده به وسیله هر مشتری (شامل زمان سفر و زمان انتظار) مورد مطالعه قرار دادند.

از نظر تحلیلی، مسایل مکان‌یابی به دسته‌های متعددی تبدیل می‌شوند [۱۹]. در ادامه این بخش به توضیح مختصر دو دسته متداول از آن‌ها می‌پردازیم.

یکی از انواع مسایل مکان‌یابی، مساله مکان‌یابی تسهیلات بدون محدودیت ظرفیت [۲۸] است. برای بیان مدل ریاضی $UFLP$ [۳۶]، مجموعه K از تسهیلات بالقوه با هزینه ثابت تاسیس F_k و مجموعه L، متقاضیانی که توسط این تسهیلات سرویس‌دهی می شوند، را در نظر بگیرید. c_{kl}، هزینه حمل‌ونقل هر واحد کالا در واحد مسافت از مرکز k به تقاضا l، D_l، مقدار تقاضای گره l می باشد. y_k متغیر صفر و یک مربوط به تاسیس یا عدم تاسیس تسهیلات در مرکز k و x_{kl} متغیر صفر و یکی است که نشان‌دهنده سرویس‌دهی (تخصیص) یا عدم سرویس‌دهی تسهیلات احداث شده در مرکز k به تقاضای l است. هدف از $UFLP$، تعیین یک مجموعه از تسهیلات است به طوری که مجموع هزینه‌ها، شامل هزینه حمل‌ونقل و هزینه ثابت تاسیس، برای همه متقاضیان مینیمم شود:

$$min \quad \sum_{k=۱}^{K}\sum_{l=۱}^{L} c_{kl}D_l x_{kl} + \sum_{k=۱}^{K} F_k y_k \qquad (۱\cdot۱)$$

$$s.t$$

$$\sum_{k=۱}^{K} x_{kl} = ۱ \qquad \forall l \qquad (۲\cdot۱)$$

$$x_{kl} \leq y_k \qquad \forall k,l \qquad (۳\cdot۱)$$

[۱] Hakimi
[۲] Berman
[۳] Drenzer

$$x_{kl}, y_k \in \{۰, ۱\} \qquad \forall k, l \qquad (۴۰۱)$$

محدودیت اول تضمین می‌کند که هر تقاضا دقیقا توسط یکی از مراکز تسهیلات سرویس‌دهی شود که این بخاطر نامحدود بودن ظرفیت کارخانه است. محدودیت دوم بیان می‌کند که تا مرکز تسهیلاتی تاسیس نشده است، نباید به تقاضایی تخصیص داده شود.

یکی دیگر از انواع مسایل مکان‌یابی تسهیلات با محدودیت ظرفیت است [۳۰]، که مدل برنامه‌ریزی $CFLP$ به صورت زیر است:

$$min \quad \sum_{k=۱}^{K}\sum_{l=۱}^{L} c_{kl}b_{kl} + \sum_{k=۱}^{K} F_k y_k \qquad (۵۰۱)$$

$$s.t$$

$$\sum_{k=۱}^{K} x_{kl} \geq ۱ \qquad \forall l \qquad (۶۰۱)$$

$$x_{kl} \leq y_k \qquad \forall k, l \qquad (۷۰۱)$$

$$\sum_{k=۱}^{K} b_{kl} = D_l \qquad \forall l \qquad (۸۰۱)$$

$$b_{kl} \leq \min\left[D_l, Cap_k\right] y_k \qquad \forall k, l \qquad (۹۰۱)$$

$$x_{kl}, y_k \in \{۰, ۱\} \qquad \forall k, l \qquad (۱۰۰۱)$$

$$b_{kl} \geq ۰ \qquad \forall k, l \qquad (۱۱۰۱)$$

در این مدل Cap_k مقدار ظرفیت مرکز k می‌باشد و بقیه پارامترها مشابه مدل $UFLP$ تعریف می‌شوند. همچنین b_{kl} متغیر تصمیم‌گیری غیرمنفی که نشان‌دهنده مقدار واحدهایی که از مرکز k به تقاضای l حمل شده است. و متغیر صفر و یک x_{kl} و y_k مشابه مدل $UFLP$ تعریف می‌شود.

تابع هدف (۵۰۱) مجموع هزینه‌های حمل‌ونقل و هزینه‌های ثابت از تاسیس مراکز تسهیلات را مشخص می‌کند، که هزینه‌های حمل‌ونقل از مجموع هزینه حمل‌ونقل هر واحد کالا از مرکز k به تقاضا l (c_{kl})، در مقدار حمل شده از مرکز k به تقاضا l (b_{kl})، بدست می‌آید.

محدودیت (۱ ۰ ۶) بیان می‌کند که هر تقاضا باید توسط حداقل یکی از مراکز تسهیلات سرویس‌دهی شود. محدودیت (۱ ۰ ۷) مشابه محدودیت (۱ ۰ ۳) در مدل $UFLP$ می‌باشد. محدودیت (۱ ۰ ۸) تاکید می‌کند که مجموع مقدار حمل شده از مراکز تسهیلات به هر تقاضا باید با میزان تقاضا شده برابر باشد. و محدودیت (۱ ۰ ۹) تضمین می‌کند که مقدار حمل شده برای هر مرکز تسهیلات k و گره تقاضا l باید از ظرفیت مرکز تسهیلات k و از مقدار تقاضا l کمتر باشد.

۳.۱ معرفی مساله تحلیل پوششی داده‌ها

در سال‌های اخیر در اغلب کشورهای جهان برای ارزیابی عملکرد نهادها و دیگر فعالیت‌های رایج در زمینه‌های مختلف، کاربردهای متفاوتی از تحلیل پوششی داده‌ها دیده شده است.

علت مقبولیت گسترده‌تر روش DEA نسبت به سایر روش‌ها، امکان بررسی روابط پیچیده و اغلب نامعلوم بین چندین ورودی و چندین خروجی (معمولاً اندازه‌پذیر) با واحدهای اندازه‌گیری مختلف است که در این فعالیت‌ها وجود دارد. فعالیت‌هایی نظیر تعمیر و نگهداری در پایگاه‌های هواپیمایی آمریکا مستقر در نواحی جغرافیایی متفاوت، نیروهای پلیس در انگلستان و ولز، عملکرد شعب بانک‌ها در قبرس و کانادا و کارایی دانشگاه‌ها در آموزش و پژوهش در آمریکا، انگلستان و فرانسه مثال‌هایی از این دست هستند. این نوع کاربردها به ارزیابی عملکردهای شهرها، مناطق و کشورها با انواع مختلف ورودی از قبیل هزینه‌های اجتماعی، شبکه‌های ایمنی و انواع خروجی از قبیل ابعاد مختلف کیفیت زندگی نیز قابل گسترش هستند. DEA همچنین امکان نگرش جدید به فعالیت‌هایی را هم که قبلاً به روش‌های دیگر ارزیابی شده‌اند، فراهم کرده است. برای مثال امکان محک‌زنی با استفاده از DEA به شناسایی منابع ناکارایی در شرکت‌های خیلی سودآور منجر شده است [۸].

قبل از آشنایی با مدل DEA، تعاریف پایه‌ای برای فهم راحت‌تر مساله تحلیل پوششی داده‌ها را توضیح می‌دهیم.

واحد تصمیم‌گیرنده

در روش DEA واحد یا سازمان تحت بررسی، واحد تصمیم‌گیرنده[۱] (DMU) نامیده می‌شود [۸]. به عبارت دیگر، منظور از واحد تصمیم‌گیرنده، واحدی است که با دریافت بردار ورودی مانند$X = (x_1, ..., x_m)$ بردار خروجی مانند $Y = (y_1, ..., y_s)$

[۱] Decision Making Unit

را تولید می‌نماید [۱]. یک DMU می‌تواند یک بانک، بیمارستان، کارخانه، مدرسه، فروشگاه، سوپرمارکت، کتاب‌خانه عمومی و ... باشد. از آن‌جایی که مدیران این واحدها با مدیریت خود و اعمال سیاست‌ها و ادغام ورودی‌ها، خروجی‌ها را تولید می‌کنند، آن‌ها را تصمیم‌گیرنده می‌نامند. لذا کلمه تصمیم‌گیرنده به معنی این است که در چگونگی استفاده از X و ادغام و پردازش آن‌ها می‌توانند تصمیم‌گیری نمایند.

حال فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری به صورت $DMU_1, DMU_2, ..., DMU_n$ وجود دارند. ورودی‌ها و خروجی‌های مشترک برای این DMUها معمولاً به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

۱. برای همه DMUها داده‌ها باید عددی مثبت و شناخته شده باشد.

۲. ورودی‌ها، خروجی‌ها و DMUها به نحوی انتخاب شوند که منعکس‌کننده علایق مدیران و تحلیل‌گران نسبت به ارزیابی کارایی آن‌ها باشند.

۳. اصولاً ورودی‌های کوچک‌تر و خروجی‌های بزرگ‌تر مناسب‌تر بوده و ترجیح داده می‌شوند. بنابراین امتیاز کارایی باید منعکس‌کننده این اصول باشد.

۴. واحد اندازه‌گیری ورودی‌ها و خروجی‌های مختلف ضرورتاً یکسان نیست. آن‌ها می توانند مثلاً تعداد پرسنل، مساحت یک ناحیه، هزینه صرف شده و ... باشند.

کارایی

کارایی به معنای خوب کار کردن، تحت تاثیر شاخص‌های درون سازمان مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از این قبیل قرار دارد که به صورت نسبت خروجی به ورودی بیان می‌شود:

$$\text{کارایی} = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}} \qquad (۱۲۰۱)$$

در مقابل آن اثربخشی یعنی کار خوب کردن، حاصل مقایسه شاخصهای برون سازمانی است. بهره‌وری[۱] ترکیبی از کارایی و اثربخشی است. به عبارت دیگر عملکرد سازمان در صورتی بهره‌ور خواهد بود، که کارا و اثربخش باشد و هر کدام به تنهایی

[۱] Productivity

نشان‌دهنده افزایش بهره‌وری نیست. پس در مقوله بهره‌وری اولاً کاری که انجام می‌شود باید کار درست و مفیدی باشد ثانیاً این کار به بهترین نحو انجام پذیرد و در راستای اهداف باشد. در اندازه‌گیری بهره‌وری نیز از یک نسبت برای ارزیابی عملکرد نیروی انسانی یا نیروی کار، استفاده می‌شود. خروجی یک ساعت کار کارگر، خروجی یک ساعت نیروی کار استخدامی و میزان فروش یا سود مثال‌هایی هستند که در صورت کسر قرار می‌گیرند. چنین اندازه‌هایی گاهی، «اندازه بهره‌وری جزیی» نامیده می‌شود. به این طریق تمایل داریم تا آن ها را از «اندازه بهره‌وری کل» متمایز کنیم. زیرا در این حالت می‌خواهیم نسبتی از خروجی به ورودی را به دست آوریم، که در برگیرنده همه خروجی‌ها و همه ورودی‌ها باشد.

کارایی مطلق یک DMU مقایسه عملکرد آن با استانداردهای کلی و کارایی نسبی، سنجش عملکرد یک DMU نسبت به واحدهای دیگر آن مجموعه است. چون استانداردهای کلی معمولاً تعریف نشده و در صورت تعریف شدن، رسیدن به آن مشکل است، لذا کاربرد کارایی نسبی گسترده‌تر از کاربرد کارایی مطلق است. اگر واحد تصمیم‌گیرنده مورد نظر دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، با استفاده از رابطه (۱۲۰۱) کارایی آن قابل محاسبه بوده و اندازه حاصل، کارایی مطلق آن واحد به شمار می‌آید. در صورت وجود چندین ورودی و چندین خروجی برای واحد تصمیم‌گیرنده موردنظر، نسبت مجموع وزن‌دار شده خروجی به مجموع وزن‌دار شده ورودی به صورت

$$w = \frac{\sum_{r=۱}^{s} u_r y_r}{\sum_{i=۱}^{m} v_i x_i} = \frac{u_۱ y_۱ + \ldots + u_s y_s}{v_۱ x_۱ + \ldots + v_m x_m} \qquad (۱۳۰۱)$$

کارایی آن واحد را اندازه‌گیری می کند. که در آن u_r وزن خروجی rام برای مقدار خروجی r یعنی y_r و v_i وزن ورودی iام برای مقدار ورودی i یعنی x_i می‌باشد.

قابل به ذکر است که تخصیص وزن‌های مناسب به ورودی‌ها و خروجی‌ها، نقش تعیین‌کننده‌ای در اندازه کارایی دارد.

کارایی نسبی، از تقسیم کارایی هر واحد به بزرگ‌ترین آن‌ها حاصل می‌شود. بنابراین اندازه کارایی هر واحد، همواره کوچک‌تر یا مساوی یک بوده و دست کم یک واحد کارایی نسبی برابر یک دارد.

تابع تولید

رابطه بین عملکرد یک واحد با عوامل تاثیرگذار بر آن را می‌توان به صورت $y = f(U, V)$ که به تابع تولید[۱] معروف است؛ نشان داد. که در آن بردار ورودی (U, V) خروجی y را تولید می‌نماید. بردار ورودی از دو قسمت تشکیل شده، که در آن U ورودی‌های قابل کنترل و V ورودی‌های غیرقابل کنترل را نشان می‌دهد. در واقع تابع تولید، تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها، ماکزیمم خروجی را بدهد. این تابع در اقتصاد خرد بسیار مورد توجه است. زیرا با داشتن آن می‌توان قضاوت نمود که یک واحد تصمیم‌گیرنده، خوب عمل می‌کند (کارا است) یا نه. هدف از معرفی و بررسی تابع تولید، مشخص کردن آن به صورتی است که بتوانیم بیش‌ترین خروجی ممکن را از ترکیب حداقل ورودی فراهم نماییم و یا در صورت عدم تحقق چنین هدفی، عوامل عدم تحقق آن را شناخته، برای رفع مشکلات اقدامات لازم را معرفی نماییم. در اغلب موارد تابع تولید در دست نیست که این به دلیل پیچیدگی فرایند تولید، تغییر در تکنولوژی تولید و چند مقداره بودن تابع تولید است. یعنی در اغلب موارد یک ترکیب از ورودی‌ها مانند $(x_1, ..., x_m)$ یک بردار خروجی مانند $(y_1, ..., y_s)$را تولید می‌نماید. از این‌رو، ناچاریم تقریبی از تابع تولید را در دست داشته باشیم. تقریب تابع تولید از طریق روش‌های پارامتری و غیر پارامتری امکان‌پذیر است.

مجموعه امکان تولید

همان‌طور که اشاره شد یکی از روش‌های تقریب تابع تولید، روش غیر پارامتری است. در این روش مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید ساخته و مرز آن را تابع تولید می‌گیریم، تابع تولید حاصل از مجموعه امکان تولید یک مرز تقریبی است که با توجه به تکنولوژی تولید دارای ویژگی‌های مورد نظر خواهد بود.

مجموعه امکان تولید را با T نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T = \{(X, Y) | \text{بردار نامنفی } X \text{ بتواند بردار نامنفی } Y \text{ را تولید کند}\}$$

فرض کنیم n مشاهده به‌صورت (X_j, Y_j) $(j = 1, \ldots, n)$ در دست داریم که بردار ورودی X_j، بردار خروجی Y_j را تولید می‌کند و دست کم یک مؤلفه از بردارهای ورودی و خروجی مخالف صفر و مثبت است. اصول موضوعه زیر برای مجموعه امکان تولید توسط فارل[۲] پیشنهاد گردید.

[۱] Production function
[۲] Farell

۱. **اصل شمول مشاهدات:** تمام واحدهای مورد ارزیابی در مجموعه امکان تولید قرار دارند. یعنی به ازای هر j $(j = ۱, \ldots, n)$ $(X_j, Y_j) \in T$ داشته باشیم:

۲. **اصل تحدب:** اگر $(X_t, Y_t) \in T$ و $(X_u, Y_u) \in T$ آنگاه به ازای هر $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم:
$(\lambda X_t + (۱ - \lambda)X_u, \lambda Y_t + (۱ - \lambda)Y_u) \in T$

۳. **اصل بی‌کرانی اشعه (بازده به مقیاس ثابت):** اگر $(X_t, Y_t) \in T$ آنگاه به ازای هر $\lambda \geq ۰$ داشته باشیم:
$(\lambda X_t, \lambda Y_t) \in T$

۴. **اصل امکان پذیری:** اگر $(\bar{X}, \bar{Y}) \in T$ آن گاه به ازای هر (X, Y) که در آن $X \geq \bar{X}$ و $Y \leq \bar{Y}$ داشته باشیم: $(X, Y) \in T$. به عبارت دیگر هر فعالیتی با ورودی ناکمتر از X و خروجی نابیشتر از Y یک فعالیت شدنی باشد.

۵. **اصل کمینه درون یابی:** با قبول این اصل می‌پذیریم که T کوچک‌ترین مجموعه‌ای است که در اصول اول تا چهارم صدق می‌کند.

مجموعه امکان تولید که در شرایط (آ) تا (ه) صدق می‌کند و با T_c نشان داده می‌شود، به صورت زیر خواهد بود:

$$T_c = \{(X, Y) | X \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j X_j, Y \leq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j Y_j, \lambda_j \geq ۰, j = ۱, \ldots, n\}$$

حال مجموعه T_c را به عنوان تابع تولید در نظر می‌گیریم. مرز مجموعه T_c ، مرز کارا می‌باشد. هر DMU که روی مرز قرار داشته باشد کارای نسبی است. در غیر این صورت، ناکارا است.

اگر DMU ناکارا باشد، به روش‌های الف: کاهش ورودی‌ها و ب: افزایش خروجی‌ها، می‌توان آن را روی مرز کارا تصویر کرد. برای مطالعه بیشتر می توان به [۱؛ ۸] مراجعه کرد.

تحلیل پوششی داده‌ها

تحلیل پوششی داده‌ها، یک روش برنامه‌ریزی ریاضی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده است که می‌توانند چندین ورودی و خروجی داشته باشند. اندازه‌گیری کارایی به دلیل اهمیت آن در ارزیابی عملکرد یک شرکت یا سازمان همواره مورد

توجه محققین قرار داشته است. در سال ۱۹۵۷ فارل با استفاده از روش غیر پارامتری، همانند اندازه‌گیری کارایی در مباحث مهندسی، به اندازه‌گیری کارایی بر واحد تولیدی اقدام کرد. فارل با استفاده از ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده و اصول حاکم بر آن‌ها، مجموعه‌ای با عنوان مجموعه امکان تولید، ارائه و قسمتی از مرز آن را به عنوان تابع تولید معرفی کرد. این مرز را مرز کارا نیز می‌نامند و واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که روی این مرز قرار می‌گیرند، کارا ارزیابی می‌شوند. اما موردی که فارل برای اندازه‌گیری کارایی مدنظر قرار داد، شامل یک ورودی و یک خروجی بود. چارنز[۱]، کوپر[۲] و رودز[۳] دیدگاه فارل را توسعه دادند و الگویی ارائه کردند که توانایی اندازه‌گیری کارایی با چندین ورودی و خروجی را داشت. این الگو، تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌ها، نام گرفت. و اولین بار در رساله دکترای رودز و به راهنمایی کوپر تحت عنوان ارزیابی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان مدارس ملی آمریکا در سال ۱۹۷۶، در دانشگاه کارنگی مورد استفاده قرار گرفت (به [۱۱] نگاه کنید).

از آن‌جا که این الگو توسط چارنز، کوپر و رودز ارائه گردید، به الگوی CCR که از حروف اول نام سه فرد یاد شده تشکیل شده است، معروف گردید. و در سال ۱۹۷۸ در مقاله‌ای با عنوان اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه شد [۱۶]. بر همین اساس مدل پایه‌ای DEA را مدل CCR نیز می‌گویند.

همچنین از آن‌جا که DEA تکنیک ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده است، حداقل یکی از واحدها روی مرز و بقیه واحدها، در زیر آن قرار دارند. نام تحلیل پوششی داده‌ها از ویژگی پوششی بودن، منشاء گرفته است.

روش‌های DEA برخلاف برخی از روش‌های عددی، مشخص بودن وزن‌ها از قبل و تخصیص آن‌ها به ورودی‌ها و خروجی‌ها لازم نیست. همچنین این روش‌ها نیازی به اشکال تابعی از قبل تعیین شده (مانند روش‌های رگرسیون آماری) و یا شکل صریح تابع تولید (مانند برخی روش‌های پارامتری) ندارد. اسلوب DEA بر پایه جبرخطی بنا شده است. و توانایی آن بیشتر به دلیل استفاده از برنامه‌ریزی خطی است. برنامه‌ریزی خطی، تحلیل پوششی داده‌ها را قادر می‌سازد تا از روش حل مساله برنامه‌ریزی خطی استفاده کند. به این ترتیب منبع و مقدار ناکارایی را برای هر ورودی و هر خروجی مشخص کند.

DEA همچنین فرصت‌های زیادی را برای همکاری میان تحلیل‌گر و تصمیم‌گیرنده ایجاد می‌کند. این همکاری می‌تواند در راستای انتخاب ورودی و خروجی واحدهای تحت ارزیابی و چگونگی عملکرد و الگویابی نسبت به مرز کارا باشد.

---

[۱] Charnes
[۲] Cooper
[۳] Rhodes

دو مشخصه اساسی برای الگوی DEA

استفاده از الگوی تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی نسبی واحدها نیازمند تعیین دو مشخصه اساسی، ماهیت الگو و بازده به مقیاس الگو است که در زیر به تشریح هر یک پرداخته می‌شود.

الف: ماهیت الگوی مورد استفاده

۱. **ماهیت ورودی:** در صورتی که فرآیند ارزیابی، با ثابت نگه داشتن سطح خروجی‌ها، سعی در حداقل‌سازی ورودی‌ها داشته باشیم، ماهیت الگوی مورد استفاده ورودی است.

۲. **ماهیت خروجی:** در صورتی که در فرآیند ارزیابی، با ثابت نگه داشتن سطح ورودی‌ها، سعی در افزایش خروجی‌ها داشته باشیم، ماهیت الگوی مورد استفاده خروجی است.

در الگوی DEA با دیدگاه ورودی، به دنبال به دست آوردن ناکارایی فنی به عنوان نسبتی هستیم که باید در ورودی‌ها کاهش داده شود تا خروجی بدون تغییر بماند و واحد در مرز کارایی قرار گیرد. در دیدگاه خروجی به دنبال نسبتی هستیم که باید خروجی‌ها افزایش یابند، بدون آن که تغییر در ورودی‌ها به وجود آید تا واحد موردنظر به مرز کارایی برسد. در الگوی CCR مقادیر به دست آمده در دو دیدگاه مساوی هستند.

علت انتخاب دیدگاه برای یک الگو DEA در ارزیابی نسبی عملکرد واحدها این است که در بعضی موارد مدیریت واحد هیچ کنترلی بر میزان خروجی ندارد و مقدار آن از قبل مشخص و ثابت است، مانند نیروگاه برق. دراین موارد میزان ورودی‌ها به عنوان متغیر تصمیم می‌باشد؛ بنابراین دیدگاه ورودی مورد استفاده قرار می‌گیرد. و بر عکس در بعضی از موارد میزان ورودی ثابت و مشخص است و میزان تولید (خروجی) متغیر تصمیم است. در چنین شرایطی دیدگاه خروجی مناسب می‌باشد. در نهایت انتخاب ماهیت ورودی و خروجی بر اساس میزان کنترل مدیر بر هریک از ورودی‌ها و خروجی‌ها تعیین می‌گردد [۱۷].

ب: بازده به مقیاس الگوی مورد استفاده

بازده به مقیاس بیانگر پیوند بین تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌های یک سیستم است. یکی از توانایی‌های روش تحلیل پوششی داده‌ها، کاربرد الگوهای مختلف متناظر با، بازده به مقیاس‌های متفاوت و هم چنین اندازه‌گیری بازده به مقیاس واحدهاست.

۱. **بازده به مقیاس ثابت:** بازده به مقیاس ثابت، یعنی هر مضربی از ورودی‌ها همان مضرب از خروجی‌ها را تولید می‌کند. الگوی CCR بازده به مقیاس واحدها را ثابت فرض می‌کند؛ بنابراین واحدهای کوچک و بزرگ با هم مقایسه می شوند.

۲. **بازده به مقیاس متغیر:** بازده به مقیاس متغیر، یعنی هر مضربی از ورودی‌ها می‌تواند همان مضرب از خروجی‌ها یا کمتر از آن یا بیشتر از آن را، در خروجی‌ها تولید کند [۱۴].

مزایا و محدودیت‌های روش DEA در مقایسه با سایر الگوها

مزایای روش DEA به شرح زیر است [۱۰]:

۱. این روش، به واحد اندازه‌گیری حساس نیست و ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌توانند بدون تبدیل به واحدهای پارامتری، در واحدهای فیزیکال مختلف خود باقی بمانند.

۲. روش DEA یک روش مدیریتی است که کارایی واحدها را، به طور نسبی اندازه‌گیری می‌کند و راهکارهای مدیریتی بر پایه داده‌های خود مجموعه ارایه می‌دهد.

۳. در حالتی که واحد اقتصادی دارای چند ورودی در فرآیند ایجاد خروجی باشد، روش برنامه‌ریزی خطی به راحتی می‌تواند ترکیب بهینه خروجی و ورودی را برای یک واحد کارا تعیین کند.

۴. روش DEA به مقایسه واحدها با یک دیگر می‌پردازد و از ایده‌آل‌گرایی محض به دور است.

۵. این روش بیشتر از سایر روش‌ها قابلیت تعمیم‌پذیری و گسترش دارد. به کارگیری آن در یک واحد برای یک موضوع، می‌توانند زمینه را برای کارهای بعدی نیز فراهم کند.

۶. روش DEA فقط کارایی را مشخص می‌کند و نقطه ضعف سایر سیستم‌های اندازه‌گیری را که نوعی مطلق‌گرایی را دنبال می‌کنند، ندارد. و کارا بودن در این الگو یک کمیت دست‌یافتنی است.

۷. تحلیل پوششی داده‌ها قابلیت بسیار بالایی در رتبه‌بندی کامل واحدهای تصمیم‌گیرنده مورد مطالعه را فراهم می‌آورد و الگوهایی وجود دارند که می‌توانند، بنگاه‌های کارا را نیز رتبه‌بندی کنند و کاراترین بنگاه را، از میان آن‌ها برگزینند.

همچنین محدودیت‌های الگوی DEA در مقایسه با سایر الگوها به صورت زیر است [۶]:

۱. چون DEA یک تکنیک ریاضی و عددی محض است، از این رو خطاهای اندازه‌گیری ممکن است تغییرات عمده‌ای در نتایج به همراه داشته باشد. از این رو می بایست پس از شناسایی واحد کارا به کنترل مجدد داده‌ها اقدام و از صحت آن اطمینان حاصل نمود.

۲. این روش صرفاً یک روش ریاضی و براساس برنامه‌ریزی خطی است و توانایی مقایسه متغیرهای کیفی واحدهای تصمیم‌گیری را ندارد.

۳. توافق کلی در مورد انتخاب ورودی‌ها و خروجی‌ها در این روش وجود ندارد.

۱.۳.۱ مدل‌بندی مساله تحلیل پوششی داده‌ها

با فرض وجود داده‌ها، باید k مساله ی بهینه‌سازی را حل کنیم. که در هر بار کارایی یک DMU_k $(k = ۱, \ldots, r, \ldots, K)$، را ارزیابی کنیم.

برای محاسبه وزن‌های v_i $(i = ۱, \ldots, I)$ و u_j $(j = ۱, \ldots, J)$ برای rام DMU که به ترتیب وزن‌های مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌ها هستند، مساله کسری زیر را حل می‌کنیم [۱۶] [۱] $(DEA۱)$:

$$max \quad \frac{\sum_{j=۱}^{J} u_j O_{jr}}{\sum_{i=۱}^{I} v_i I_{ir}} \qquad (۱۴۰۱)$$

$$s.t$$

[۱] Linear Fractinal data envelopment analysis model

$$\frac{\sum_{j=۱}^{J} u_j O_{jk}}{\sum_{i=۱}^{I} v_i I_{ik}} \leq ۱ \qquad \forall k \qquad (۱۵\cdot ۱)$$

$$u_j, v_i \geq ۰ \qquad \forall j, i \qquad (۱۶\cdot ۱)$$

درمدل‌بندی فوق، O_{jk} مقدار خروجی jام برای kامین DMU و I_{ik} مقدار ورودی iام برای kامین DMU هستند.

این محدودیت‌ها تضمین می‌کند که نسبت مجموع وزن‌دار شده خروجی‌ها به مجموع وزن‌دار شده ورودی‌ها برای هیچ یک از DMUها بیشتر از یک نمی‌شود. تابع هدف به نحوی است که v_iها و u_jهای به دست آمده، کارایی را برای r DMUام حداکثر می‌کنند. برنامه‌هایی مشابه برای سایر DMUها به‌طور متوالی حل می‌شود تا کارایی بهینه و مجموعه وزن‌ها برای هر DMU به دست آید.

برای حل مدل کسری به عنوان برنامه‌ریزی خطی، مخرج تابع هدف (۱۴۰۱) را برابر یک فرض می‌کنیم: $\sum_{i=۱}^{I} v_i I_{ir} = ۱$ و آن را به عنوان یک محدودیت در نظر می‌گیریم. سپس صورت کسر (۱۴۰۱) را ماکزیمم می‌کنیم. و همچنین با ضرب طرفین محدودیت (۱۵۰۱) در مخرج کسر، یعنی مجموع وزن‌دار شده ورودی‌ها، مجموعه محدودیت خطی زیر را داریم:

$$\sum_{j=۱}^{J} u_j O_{jk} \leq \sum_{i=۱}^{I} v_i I_{ik} \forall k$$

علاوه بر این، برای جلوگیری از به وجود آمدن کارایی ضعیف برای DMUها در مدل برنامه‌ریزی خطی DEA لازم است که هر وزن از یک مقدار $\varepsilon > ۰$ (یک مقدار بی‌نهایت کوچک) بیشتر باشد. کارایی ضعیف برای یک DMU خاص زمانی اتفاق می‌افتد، که مقدار بهینه کارایی بدست آمده (w^*)، از مدل DEA برابر یک و حداقل یکی از وزن‌های ورودی و خروجی (v^*, u^*)، در جواب بهینه برابرCCR صفر باشد[۱].

بنابراین مدل کسری DEA برای r DMUام به برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود [۱۶] [۲] $(DEA۲)$:

$$max \quad \sum_{j=۱}^{J} u_j O_{jr} \qquad (۱۷\cdot ۱)$$

$$s.t$$

$$\sum_{i=۱}^{I} v_i I_{ir} = ۱ \qquad (۱۸\cdot ۱)$$

[۱] در منبع [۸] از این حالت به عنوان ناکارای CCR یاد می‌شود. ناکارای CCR یعنی این‌که یا $w^* < ۱$ یا $w^* = ۱$ و حداقل یک عنصر (v^*, u^*) در هر جواب بهینه برابر صفر شود.

[۲] Modifeied data envelopment analysis model

$$\sum_{j=۱}^{J} u_j O_{jk} - \sum_{i=۱}^{I} v_i I_{ik} \leq ۰ \qquad \forall k \qquad (۱۹\cdot ۱)$$

$$u_j, v_i \geq \varepsilon \qquad \forall j, i \qquad (۲۰\cdot ۱)$$

قابل به توجه است که برای ارزیابی کارایی هر واحد تصمیم‌گیری باید Kبار مساله بهینه‌سازی DEA۲ حل شود که هر مساله شامل $I + J$ متغیر تصمیم و $K + ۱$ محدودیت است.

۲.۳.۱ تجمیع هم‌زمان مدل تحلیل پوششی داده‌ها

در تحلیل پوششی داده‌ها باید توجه داشت که واحدهای مورد ارزیابی باید کاملاً هم‌ارز باشند. به این معنی که دارای ورودی‌ها و خروجی‌های کاملاً مشابه باشند. گاهی به علت ازدیاد تعداد واحدهای تصمیم‌گیری باید تعداد زیادی مدل برنامه ریزی‌خطی نوشت که پروسه حل مسئله بسیار وقت‌گیر خواهد بود. برای حل این مشکل کلیمبرگ[۱] در سال ۲۰۰۶ مدلی ارائه نمود که در آن متغیر جدیدی به‌نام d_r، سطح ناکارایی rامین واحد تصمیم‌گیری، تعریف و آن را در تابع هدف قرار داد $(d_r = ۱ - w_r)$ [۲۵]. در این صورت برای محدودیت (۱۹۰۱) در مدل برنامه‌ریزی خطی DEA خواهیم داشت:

$$\sum_{j=۱}^{J} u_j O_{jk} - \sum_{i=۱}^{I} v_i I_{ik} + d_r = ۰$$

با اعمال محدودیت (۱۸۰۱) به رابطه بالا، برای DMU_r خواهیم داشت:

$$\sum_{j=۱}^{J} u_j O_{jr} + d_r = ۱$$

بنابراین مدل DEA اصلاح شده زیر را خواهیم داشت [۲۵] [۲] :(MDEA۲)

$$max \quad w_r = ۱ - d_r \qquad (۲۱\cdot ۱)$$

$$s.t$$

$$\sum_{i=۱}^{I} v_i I_{ir} = ۱ \qquad (۲۲\cdot ۱)$$

$$\sum_{j=۱}^{J} u_j O_{jr} + d_r = ۱ \qquad (۲۳\cdot ۱)$$

[۱] Klimberg
[۲] Modified Data Envelopment Ananlysis Model

$$\sum_{j=۱}^{J} u_j O_{jk} - \sum_{i=۱}^{I} v_i I_{ik} \leq ۰ \qquad \forall k \neq r \qquad (۲۴\cdot ۱)$$

$$u_j, v_i \geq \varepsilon \qquad \forall j, i \qquad (۲۵\cdot ۱)$$

می‌توانیم مدل $MDEA$۲ را برای همه واحدها به صورت هم‌زمان بسط دهیم. به این مدل، مدل تجمیع هم‌زمان DEA [۱] (SDEA) می‌گویند که به صورت زیر است [۲۵]:

$$max \quad \sum_{r} w_r = \sum_{r} (۱ - d_r) \qquad (۲۶\cdot ۱)$$

$$s.t$$

$$\sum_{i=۱}^{I} v_{ri} I_{ir} = ۱ \qquad \forall r \qquad (۲۷\cdot ۱)$$

$$\sum_{j=۱}^{J} u_{rj} O_{jr} + d_r = ۱ \qquad \forall r \qquad (۲۸\cdot ۱)$$

$$\sum_{j=۱}^{J} u_{rj} O_{jk} - \sum_{i=۱}^{I} v_{ri} I_{ik} \leq ۰ \qquad \forall k, r; k \neq r \qquad (۲۹\cdot ۱)$$

$$d_r, u_{rj}, v_{ri} \geq \varepsilon \qquad \forall j, i, r \qquad (۳۰\cdot ۱)$$

در این مدل، d_r، u_{rj} و v_{ri} متغیرهای تصمیم هستند که به ترتیب نشان‌دهنده سطح ناکارایی rامین واحد تصمیم‌گیری، وزن خروجی jام و وزن ورودی iام واحد r هستند.

۳.۳.۱ مروری بر کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها

امروزه استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها با سرعت زیادی در حال گسترش بوده و توسعه‌های زیادی از جنبه تئوری و کاربردی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها اتفاق افتاده است. از جمله از بیشترین کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها در ایران و سایر کشورها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- ارزیابی کارایی حمل‌ونقل عمومی از جمله شبکه اتوبوس‌رانی

[۱] Simultaneous Data Envelopment Analysis Model

۲- ارزیابی عملکرد واحدهای اقتصادی به ویژه بانک‌ها و تخصیص هزینه‌های ثابت و منابع

۳- کاربرد مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی عملکرد نظام سلامت کشورهای آسیایی

۴- بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

۵- ارزیابی عملکرد گروه‌های آموزشی دانشگاه‌ها

۶- کاربرد تحلیل پوششی داده‌ها در اولویت‌بندی نیروگاه‌ها

۷- اررزیابی کارایی ایستگاه‌های مترو درون شهری

۸- رتبه‌بندی نمایندگی‌های انواع شرکت‌ها از جمله شرکت‌های بیمه و مسافربری

۹- ارزیابی کارایی بیمارستان‌ها و سایر مراکز بهداشتی

مراجع

[۱] جهانشاهلو، غ، حسین‌زاده لطفی، ف، نیکومرام، ه. تحلیل پوششی داده‌ها و کاربردهای آن. دانشگاه آزاد اسلامی تهران، ۱۳۸۳.

[۲] راهدار، س. یک مدل جدید برای مساله مکان‌یابی پایانه‌های اتوبوس‌رانی و حل آن با استفاده از دو الگوریتم فراابتکاری. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۹۵.

[۳] رهنما، م، اجزاء شکوهی، م، عرب، ح. ارزیابی کارایی خطوط اتوبوس‌رانی شهر مشهد با مدل تحلیل پوششی داده‌ها (نمونه موردی خطوط پایانه مصلی). ششمین کنفرانس ملی برنامه‌ریزی و مدیریت شهری با تاکید بر مؤلفه‌های شهر اسلامی، شورای اسلامی شهر مشهد، ۱۳۹۳.

[۴] صادقی مقدم، م، مؤمنی، م، نالچیگر، س. برنامه‌ریزی یکپارچه تأمین، تولید و توزیع زنجیره تأمین با بکارگیری الگوریتم ژنتیک. نشریه مدیریت صنعتی، دوره ۱، شماره ۲، صص ۷۱-۸۸، ۱۳۸۸.

[۵] عبدی، م، فاروقی، ف، رحیمی، آ. سنجش کارایی سامانه حمل‌ونقل همگانی در شهر یزد. نشریه تحقیقات کاربردی علوم جغرافیایی سال سیزدهم، شماره ۳۰، صص ۲۵۰-۲۲۹، ۱۳۹۲.

[۶] غفورنیان، م. ارزیابي عملکرد ادارات تابع شرکت مخابرات استان هرمزگان با روش تحلیل پوششی داده‌ها. پایان‌نامه کارشناسي ارشد مدیریت صنعتي، دانشگاه شیراز، ۱۳۸۳.

[۷] قوامی، م، کریمی، ع، مسگری، م. ارزیابی خطوط اتوبوس‌رانی با استفاده از سامانه اطلاعات مکانی و تحلیل پوششی داده‌ها، مطالعه موردی: خطوط اتوبوس‌رانی تهران. مهندسی حمل‌ونقل، سال دوم، شماره سوم، صص ۲۷۱-۲۶۱، ۱۳۹۰.

[۸] کوپر، و، سیفورد، ل، تن، ک. تحلیل پوششی داده‌ها، مدل‌ها و کاربردها. ترجمه میرحسنی، ع. دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران، ۱۳۹۳.

[۹] مریخ بیات، ف. الگوریتم‌های بهینه‌سازی فراابتکاری (همراه با کاربردهایی در مهندسی برق). انتشارات جهاددانشگاهی، ۱۳۹۳.

[۱۰] مؤتمني، ع. طراحي مدل پويايي بهره‌وري با رويكرد تحليل پوششي داده‌ها. رساله دكتري، دانشگاه تربيت مدرس تهران، ۱۳۸۱.

[۱۱] مهرگان، م. مدل‌های کمی در ارزیابی عملکرد سازمان‌ها (تحلیل پوششی داده‌ها). تهران، ۱۳۸۳.

[۱۲] یقینی، م، اخوان کاظم‌زاده، م. الگوریتم‌های بهینه‌سازی فراابتکاری. جهاد دانشگاهی واحد صنعتی امیرکبیر.

[13] Aboolian. R, Berman. O, Drezner. Z. The multiple server location problem. Annals Operation Reasearch. 167:337-352,2009.

[14] Banker. R. D, Thrall. R. M. Estimation of returns to seale using data envelopment analysis. European Journal of Operational Research. 62:74-78, 1992.

[15] Berman. O, Drezner. Z. The multiple server location problem. Journal of the Operational Research Society. 58:91-99, 2007.

[16] Charnes. A, Cooper. W, Rhodes. E. Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research. 2:429-444, 1978.

[17] Colli. T, Rao. D. S. P, Batteseo. G. E. An introduction to efficiency and productivity analysis. Springer Science & Business Media, 2005.

[18] Desai. A, Storbeck. J. E. A data envelopment analysis for spatial efficiency. Computers, Enviroment and Urban Systems. 14(2):145-156, 1990.

[19] Eiselt. H. A, Marianov. V. Foundations of location analysis. Springer US, 2011.

[20] Fogarty.T.C. Varying the probability of mutation in the genetic algorithm. In Proceedings of the 3rd international conference on genetic algorithms, pp. 104-109. Morgan Kaufmann Publishers Inc, 1989.

[21] Ghanbari. R, Mahdavi-Amiri. N. Solving bus terminal location problem using evolutionary algorithms. Applied Soft Computing, 11:991-999, 2011.

[22] Hakimi. S. L. Optimal locations of switching center and the absolute centers and medians of a graph. Operations Research. 12:450-459, 1964.

[23] Holland.J.H. Adaption in natural and artificial system. The university of Michigan Press,1975.

[24] Holmgren J. The efficiency of public transport operations–An evaluation using stochastic frontier analysis. Research in Transportation Economics. 39(1):50-7, 2013.

[25] Klimberg. R. k, Ratick.S. J. Modeling data envelopment analysis (DEA) efficient location/allocation decisions. Computers and Operations Research. 35:457-474, 2008.

[26] Knowles. J. D, Corne. D. W. M-PAES: A memetic algorithm for multiobjective optimization. In Evolutionary Computation, 2000. Proceedings of the 2000 Congress on, vol. 1, pp. 325-332. IEEE, 2000.

[27] Lao Y, Liu L. Performance evaluation of bus lines with data envelopment analysis and geographic information systems. Computers, Environment and Urban Systems. 33(4):247-55, 2009.

[28] Mecke. S, Schobel. A, Wegner. D. Stop location-complexity and approximation. In 5th Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways. Number 06901 in Dagstuhl Seminar proceedings, 2006.

[29] Miettinen. K. Nonlinear multiobjective optimization. Vol. 12. Springer Science & Business Media, 2012.

[30] Schilling. D. A, Jayaraman. V, Barkhi. R. A review of covering models in facility location. Location Science. 1:25-55, 1993.

[31] Sinriech.D, Samakh.E. A genetic approach to the pick up/delivery station location problem in segmented flow based material handling systems. Journal of manufacturing systems, 18(2):81-99, 1999.

[32] Thomas. P, Chan. Y, Lehmkuhl. L, Nixon. W. Obnoxious-facility location and data envelopment analysis: A combined distance-based formulation. European Journal of Operational Research. 141(3):495-514, 2002.

[33] Van larhoven. P.J.M, Aarts. E.H.L. Simulated annealing.In Simulated annealing: Theory and applications, pp. 7-15, Dordrecht, 1987.

[34] Viton. P. A. Technical efficiency in multi-mode bus transit: A production frontier analysis. Transportation Research Part B: Methodological. 31(1):23-39, 1997.

[35] Weber. A. Uber den Standort der Industrien. University of Chicago, 1929.

[36] Wolsey. L. A, Nemhauser. G. A. Integer programming and combinatorial optimization. NewYork: John Wiley and Sons, 1988.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

ابتکاری ..... Heuristic

الگوریتم ژنتیک ..... Genetic Algorithm

الگوریتم‌های تقریبی ..... Approximate Algorithms

الگوریتم‌های دقیق ..... Exact Algorithms

انتخاب رقابتی ..... Tornament

ب

بهره‌وری ..... Productivity

ت

تابع برازندگی ..... Fitness Function

تابع تولید ..... Production function

تحلیل پوششی داده‌ها ..... Data Envelopment Analysis

تقاطع ..... Crossover

ج

جمعیت ..... Population

جهش ..... Mutation

ف

فراابتکاری ..... Metaheuristic

ک

کارایی ..... Efficiency

کروموزوم ..... Chromosome

م

مجموع موزون ..... weighted sum

مساله مکان‌یابی پایانه‌های اتوبوس‌رانی ..... Bus Terminal Location Problem

مساله مکان‌یابی تسهیلات ..... Facility Location Problem

مساله مکان‌یابی تسهیلات با محدودیت ظرفیت ..... Capacitated Facility Location Problem

مساله مکان‌یابی تسهیلات بدون ظرفیت ..... Uncapacitated Facility Location Problem

و

واحد تصمیم‌گیرنده ..... Decision Making Unit

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

الگوریتم‌های تقریبی ..... Approximate Algorithms

B

مساله مکان‌یابی پایانه‌های اتوبوس‌رانی ..... Bus Terminal Location Problem

C

مساله مکان‌یابی تسهیلات با محدودیت ظرفیت ..... Capacitated Facility Location Problem

کروموزوم ..... Chromosome

تقاطع ..... Crossover

D

تحلیل پوششی داده‌ها ..... Data Envelopment Analysis

واحد تصمیم‌گیرنده ..... Decision Making Unit

E

کارایی ..... Efficiency

الگوریتم‌های دقیق ..... Exact Algorithms

F

مساله مکان‌یابی تسهیلات ..... Facility Location Problem

تابع برازندگی ..... Fitness Function

G

الگوریتم ژنتیک ..... Genetic Algorithm

H

ابتکاری ..... Heuristic

M

فراابتکاری ..... Metaheuristic

جهش ..... Mutation

P

جمعیت ..... Population

تابع تولید ..... Production function

بهره‌وری ..... Productivity

T

Tornament ..... انتخاب رقابتی

U

Uncapacitated Facility Location Problem ..... مساله مکان‌یابی تسهیلات بدون ظرفیت

W

weighted sum ..... مجموع موزون

نمایه

Approximate Algorithms الگوریتم‌های تقریبی. ۴۹

Bus Terminal Location Problem مساله مکان‌یابی پایانه‌های اتوبوس‌رانی. ۱۱

Capacitated Facility Location Problem مساله مکان‌یابی تسهیلات با محدودیت ظرفیت. ۱۰

Chromosome کروموزوم. ۵۰

Crossover تقاطع. ۵۰

Data Envelopment Analysis تحلیل پوششی داده‌ها. ۹

Decision Making Unit واحد تصمیم‌گیرنده. ۱۴

Efficiency کارایی. ۹

Exact Algorithms الگوریتم‌های دقیق. ۴۹

Facility Location Problem مساله مکان‌یابی تسهیلات. ۱۰

Fitness Function تابع برازندگی. ۵۰

Genetic Algorithm الگوریتم ژنتیک. ۴۹

Heuristic ابتکاری. ۴۹

Metaheuristic فراابتکاری. ۴۹

Mutation جهش. ۵۰

Population جمعیت. ۵۰

Production function تابع تولید. ۱۷

Productivity بهره‌وری. ۱۵

Tornament انتخاب رقابتی. ۵۲

Uncapacitated Facility Location Problem مساله مکان‌یابی تسهیلات بدون ظرفیت. ۱۰

weighted sum مجموع موزون. ۳۶