بسم الله الرحمن الرحیم

عنوان

روش‌هایی در حل دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای با استفاده از برنامه‌ریزی غیرخطی

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

ما در جهان واقعیات بسیاری از مفاهیم را به صورت فازی (نادقیق و مبهم) درک می‌کنیم و به کار می‌بندیم، ذهن انسان این توانایی را دارد که این مفاهیم را با سرعت و انعطاف پذیری بالایی بفهمد، این در حالی است که ماشین فقط اعداد را می‌فهمد و دقیق است. هدف از به کارگیری علم فازی، ارایه شیوه‌هایی نو در علوم است که راز این توانایی را از انسان بیاموزد و تا حد امکان به ماشین آموزش دهد. از طرفی دستگاه‌های خطی یکی از شناخته شده‌ترین و پرکاربردترین مباحث در سایر علوم هستند. در بیش‌تر مسایلی که منجر به حل یک دستگاه خطی می‌شوند اطلاعات مساله به صورت دقیق تعیین می‌شوند، اما در مسایلی که در دنیای واقعی مطرح می‌شوند از آن‌جایی که محیط بیان مساله یک محیط غیر دقیق و فازی است، نمی‌توان اطلاعات دقیقی از مساله به دست آورد . از این‌رو سعی می‌کنیم برای حل بهتر این گونه مسایل از مدل فازی آن‌ها استفاده کنیم.

دستگاه‌های خطی فازی کاربردهای زیادی در زمینه های مختلف علوم ومهندسی و... دارد؛ از جمله این کاربردها می‌توان به کاربرد در ریاضیات مالی و اقتصاد [۳۱] و در شبکه‌های عصبی [۳۵] اشاره کرد.

هدف ما در این‌جا حل و بررسی دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای است. تا آن‌جایی که ما می‌دانیم، روش‌هایی براساس برنامه‌ریزی غیرخطی برای حل این نوع دستگاه‌ها ارایه نشده است، از این‌رو ما سعی کردیم تا با استفاده از مدل کمترین مربعات و فاصله مینگ و همکاران [۲۹] برای دو عدد فازی و حل یک مساله برنامه‌ریزی درجه دو جوابی برای دستگاه خطی فازی مورد نظر بیابیم.

این پایان‌نامه به صورت زیر سازمان‌دهی شده است:

در فصل اول مروری بر روش های ارایه شده برای حل انواع دستگاه های خطی فازی LR بازه‌ای انجام

خواهیم داد.

در فصل دوم روش کمترین مربعات پیشنهادی توسط قنبری و مهدوی‌امیری در [۱۹] را برای حل دستگاه‌های خطی فازی LR مثلثی بررسی خواهیم کرد.

در فصل سوم و چهارم نشان می‌دهیم با استفاده از مدل کمترین مربعات ارایه شده در فصل دوم و حل یک مساله برنامه ریزی درجه دو می‌توان جوابی برای دستگاه خطی فازی LR بازه‌ای مورد نظر یافت. در ادامه مقایسه‌ای بین میانگین خطاهای نسبی به وجود آمده، حاصل از حل مساله برنامه‌ریزی درجه دو با استفاده از یک نوع الگوریتم نقطه درونی با شروع از سه نقطه اولیه درونی شدنی انجام خواهیم داد.

در فصل پنجم نشان می‌دهیم می‌توان یک دستگاه خطی فازی LR بازه‌ای را به یک دستگاه خطی فازی LR مثلثی تبدیل کرد و سپس با استفاده از روش پیشنهادی در فصل دوم به حل آن پرداخت.

در فصل ششم با استفاده از روش های پیشنهادی در فصل سوم و چهارم روشی را برای حل دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای با متغیرها و پارامترهای فازی LR بازه‌ای مختلط پیشنهاد می‌کنیم.

فصل ۱

روش‌هایی در حل دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای با استفاده از برنامه‌ریزی غیرخطی

۱.۱ بررسی روش‌های حل دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای

در بیش‌تر مسایلی که منجر به حل یک دستگاه خطی می‌شوند، اطلاعات مساله به صورت دقیق تعیین شده‌اند، اما مسایلی که در دنیای واقعی با آن‌ها سر و کار داریم از آن‌جایی که محیط بیان مساله یک محیط غیردقیق و فازی است و تمام تصمیمات ما در شرایط عدم اطمینان گرفته می‌شود، نمی‌توان انتظار داشت اطلاعات دقیقی از مساله به دست آید. از این‌رو، استفاده از مدل فازی انعطاف‌پذیری بیش‌تری را برای حل بهتر این‌گونه مسایل فراهم می‌کند. دستگاه‌های خطی فازی نقش مهمی در علوم ومهندسی و... دارد؛ از جمله این کاربردها می‌توان به کاربرد در ریاضیات مالی و اقتصاد [۳۱] ، در شبکه عصبی[۱] [۳۵] و... اشاره کرد. دیگر کاربردها را در [۲۶] و [۳۲] ببینید.
در حل یک دستگاه خطی فازی ممکن است پارامترها و یا متغیرها و یا هردو مقادیری فازی باشند.

[1] Neural Network

در این فصل، مروری بر مدل‌های مختلف دستگاه‌های خطی فازی و روش‌های ارایه شده برای حل آن‌ها خواهیم داشت. نخست، به بیان مفاهیم اولیه که در ادامه کار از آن‌ها استفاده خواهیم کرد، می‌پردازیم.

۱.۱.۱ پیش‌نیازها

تعریف ۱.۱.۱ (مجموعه فازی[1]). [۴۸] اگر $\mathbb{R}$ یک مجموعه‌ای از اشیاء مانند x باشند، آن‌گاه یک مجموعه فازی مانند $\tilde{A}$ روی $\mathbb{R}$ را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in \mathbb{R}\}$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ درجه عضویت یا تابع عضویت x از در $\tilde{A}$ نامیده می‌شود که مجموعه $\mathbb{R}$ (مجموعه مرجع) را به بازه $[0, 1]$ می‌نگارد. هرچه $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به یک نزدیک‌تر باشد، x بیش‌تر به $\tilde{A}$ تعلق دارد.

تعریف ۲.۱.۱ (تکیه‌گاه فازی[2]). [۴۸] تکیه‌گاه یک مجموعه فازی مانند$\tilde{A}$، اعضایی از مجموعه مرجع هستند که دارای تابع عضویت غیرصفر هستند.

$$supp(A) = \{x \in \mathbb{R} | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

تعریف ۳.۱.۱ (کانون فازی[3]). [۴۸] مرکز یا کانون یک مجموعه فازی مانند $\tilde{A}$، اعضایی از مجموعه مرجع هستند که دارای درجه عضویت یک هستند.

$$C(A) = \{x \in \mathbb{R} | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

تعریف ۴.۱.۱ (α - برش). [۴۸] α-برش یک مجموعه فازی مانند $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

تعریف ۵.۱.۱ (مجموعه فازی نرمال[4]). [۴۸] مجموعه ای است که دارای دستکم یک عضو با

[1] Fuzzy Set

[2] Fuzzy Support

[3] Fuzzy Center

[4] Normal Fuzzy Set

درجه عضویت یک باشد.

$$N(A) = \{\exists x \in \mathbb{R} | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

تعریف ۶.۱.۱ (عدد فازی[1]). [۴۸] مجموعه فازی $\tilde{A}$ را یک عدد فازی نامیدند، هرگاه دستکم در سه ویژگی زیر صدق کند:

۱) $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ برای $x \in [a,b]$ و $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$ برای $x \notin [a,b]$.

۲) تکیه‌گاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ کراندار باشد.

۳) α-برش یک مجموعه فازی مانند $\tilde{A}$ یک بازه‌ی بسته باشد.

تعریف ۷.۱.۱ (عدد فازی LR بازه‌ای). [۴۸] یک عدد فازی $\tilde{A}$ با تابع عضویت زیر را

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\dfrac{a-x}{\alpha}), & a-\alpha \leq x \leq a, \\ 1, & a \leq x \leq b, \\ R(\dfrac{x-b}{\beta}), & b \leq x \leq b+\beta, \\ 0, & O.W. \end{cases}$$

یک عدد فازی LR بازه‌ای می‌نامند که در آن توابع پیوسته L و R به‌ترتیب توابع مرجع[2] غیرکاهشی و غیر افزایشی از $\mathbb{R}^+$ به $[0,1]$ هستند. این عدد فازی را به صورت $\tilde{A} = (a,b,\alpha,\beta)_{LR}$ نشان می‌دهند. در این نمایش $[a,b]$ را هسته و $\alpha \geq 0$ و $\beta \geq 0$ را به ترتیب پهنای چپ و راست برای عدد فازی $\tilde{A}$ می‌نامند.

دو نوع رایج از اعداد فازی، اعداد فازی مثلثی[3] و اعداد فازی ذوزنقه‌ای[4] هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

[1] Fuzzy Number

[2] Generating Function

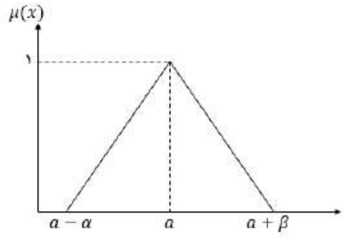
[3] Triangular Fuzzy Numbers

[4] Trapezoidal Fuzzy Numbers

تعریف ۸.۱.۱ (عدد فازی مثلثی). [۴۸] عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)_{LR}$ با تابع عضویت:

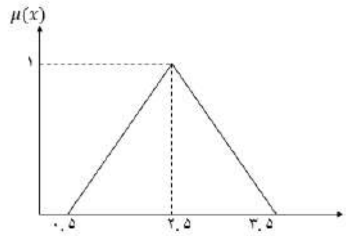
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{\alpha} + ۱, & a - \alpha \leq x \leq a, \\ \dfrac{a-x}{\beta} + ۱, & a \leq x \leq a + \beta, \\ ۰, & O.W. \end{cases}$$

به صورت زیر نشان داده می‌شود:



شکل ۱.۱: عدد فازی مثلثی

مثال ۹.۱.۱. فرض کنید $\tilde{A} = (۲/۵, ۲, ۱)_{LR}$ یک عدد فازی مثلثی باشد، تکیه‌گاه این عدد $(۰/۵, ۳/۵)$ و $a = ۲/۵$ مرکز(کانون) این عدد است. نمایش این عدد به صورت زیر است:



شکل ۲.۱: مثال ۹.۱.۱

ملاحظه ۱۰.۱.۱. در [۴۸]، جمع و ضرب اسکالر بین دو عدد فازی مثلثی دلخواه $\tilde{M} = (m, m_\alpha, m_\beta)_{LR}$ و $\tilde{N} = (n, n_\alpha, n_\beta)_{LR}$ که در آن m و n به ترتیب مراکز، m_α و n_α و همچنین m_β و n_β به ترتیب پهنای چپ و راست دو عدد فازی $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ هستند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

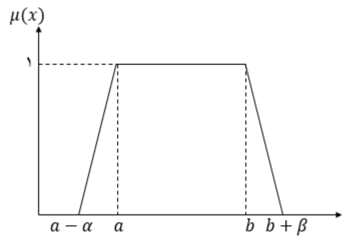
۱. $\tilde{M} \bigoplus \tilde{N} = (m+n, m_\alpha + n_\alpha, m_\beta + m_\beta)_{LR}.$

۲. $k\tilde{M} = \begin{cases} (km, km_\alpha, km_\beta)_{LR}, & k \geq ۰, \\ (km, -km_\beta, -km_\alpha)_{LR}, & k \leq ۰. \end{cases}$

تعریف ۱۱.۱.۱ (عدد فازی ذوزنقه‌ای). [۴۸] عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$ با تابع عضویت :

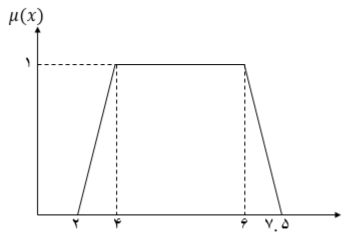
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۱ - \dfrac{a-x}{\alpha}, & a - \alpha \leq x \leq a, \\ ۱, & a \leq x \leq b, \\ ۱ - \dfrac{x-b}{\beta}, & b \leq x \leq b + \beta, \\ ۰, & O.W. \end{cases}$$

به صورت زیر نشان داده می‌شود:



شکل ۳.۱: عدد فازی ذوزنقه‌ای

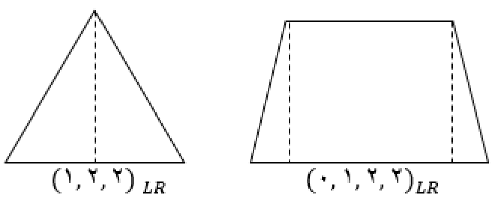
مثال ۱۲.۱.۱. فرض کنید $\tilde{A} = (۴, ۶, ۲, ۱/۵)_{LR}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد، تکیه‌گاه این عدد $(۲, ۷/۵)$ و $[۴, ۶]$ هسته این عدد است. نمایش این عدد به صورت زیر است:



شکل ۴.۱: مثال۱۲.۱.۱

تعریف ۱۳.۱.۱ (عدد فازی متقارن[1]). یک عدد فازی LR مثلثی $\tilde{a} = (a, a^{\alpha}, a^{\beta})_{LR}$ یا عدد فازی LR ذوزنقه‌ای $\tilde{a} = (a^{l}, a^{r}, a^{\alpha}, a^{\beta})_{LR}$ را یک عدد فازی LR متقارن گوییم، اگر $a^{\alpha} = a^{\beta}$ و برای توابع مرجع داشته باشیم $L(x) = R(x)$ برای هر $x \in \mathbb{R}$.

مثال ۱۴.۱.۱. عدد فازی LR ذوزنقه‌ای $\tilde{a} = (۰, ۱, ۲, ۲)_{LR}$ و عدد فازی LR مثلثی $\tilde{a} = (۱, ۲, ۲)_{LR}$ نمونه‌ای از یک عدد فازی LR متقارن هستند که $L(x) = R(x) = max\{۰, ۱ - x\}$.



شکل ۵.۱: مثال ۱۴.۱.۱

ملاحظه ۱۵.۱.۱. یک عدد فازی LR ذوزنقه‌ای با توابع مرجع (L و R) دلخواه را در حالت کلی، عدد فازی LR بازه‌ای می‌نامیم.

ملاحظه ۱۶.۱.۱. در یک عدد فازی LR بازه‌ای اگر $a = b$ در این صورت عدد فازی LR بازه‌ای به عدد فازی LR مثلثی تبدیل می‌شود.

[1] Symmetric Fuzzy Number

ملاحظه ۱.۱.۱۷. در [۴۸]، جمع و ضرب اسکالر بین دو عدد فازی LR بازه‌ای دلخواه $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ به صورت $\tilde{M}=(m_1,m_2,m_\alpha,m_\beta)_{LR}$ و $\tilde{N}=(n_1,n_2,n_\alpha,n_\beta)_{LR}$ که در آن m_1 و n_1 و همچنین m_2 و n_2 به ترتیب مراکز چپ و راست، m_α و n_α و همچنین m_β و n_β به ترتیب پهنای چپ و راست دو عدد فازی $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ هستند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. $\tilde{M}\bigoplus\tilde{N}=(m_1+n_1,m_2+n_2,m_\alpha+n_\alpha,m_\beta+m_\beta)_{LR}.$

۲. $k\tilde{M}=\begin{cases}(km_1,km_2,km_\alpha,km_\beta)_{LR}, & k\geq 0,\\ (km_2,km_1,-km_\beta,-km_\alpha)_{LR}, & k\leq 0.\end{cases}$

ملاحظه ۱.۱.۱۸. در این پایان‌نامه مجموعه اعداد فازی LR مثلثی را با $F(\mathbb{R}^1)_{LR}$ و مجموعه اعداد فازی LR بازه‌ای را با $I(\mathbb{R}^1)_{LR}$ نشان می‌دهیم. در این‌جا، بیش‌تر با اعداد فازی LR بازه‌ای کار می‌کنیم.

در ادامه با استفاده از مفاهیم بیان شده در این بخش، انواع دستگاه‌های خطی فازی را بررسی و روش‌های پیشنهادی سایر پژوهشگران را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱.۱.۲ حل دستگاه‌های خطی فازی با متغیرهای فازی

در این بخش انواع گوناگونی از دستگاه‌های خطی را با متغیرهای فازی LR بازه‌ای[1] و روش‌های حل آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

دستگاه خطی با متغیرهای فازی به صورت زیر است:

$$A\tilde{x}=\tilde{b}, \qquad (1.1)$$

که در آن $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ و $\tilde{b}\in I(\mathbb{R}^m)$ داده شده است و ما به دنبال پیدا کردن $\tilde{x}\in I(\mathbb{R}^n)$ به عنوان جوابی از مساله هستیم.

در ادامه به طور مختصر به روش‌های پیشنهادی سایر پژوهشگران برای حل این‌گونه اشاره می‌کنیم.

[1] Fuzzy LR Interval Variables Linear Systems

روش فریدمن و همکاران (۱۹۹۶)

فریدمن و همکاران در [۱۵] با استفاده از تعریف نوعی S-ماتریس‌ها و محاسبه وارون آن، روشی را برای حل دستگاه‌های خطی فازی با متغیرهای فازی بیان کردند. روش‌های مشابه را می توانید در [۱۳] و [۱۸] و [۲۱] و [۲۸] و [۳۴] و [۴۱] ببینید.

روش عباس‌بندی و علوی (۲۰۰۵)

عباس‌بندی و علوی در [۱] با استفاده از تعریف اعداد فازی متقارن و تبدیل دستگاه خطی فازی با متغیرهای فازی دلخواه به یک دستگاه خطی فازی با متغیرهای فازی متقارن، روشی را برای حل دستگاه‌های خطی فازی با متغیرهای فازی ارایه کردند. روش مشابه را می‌توانید در [۱۱] ببینید.

روش ژانگ و ونگ (۲۰۰۶)

ژانگ و ونگ در [۴۶] بیان کردند در صورتی که دستگاه خطی فازی با استفاده از روش فریدمن و همکاران در [۱۵] جواب نداشته باشد می‌توان جواب تقریبی دستگاه را محاسبه کرد. روش‌های مشابه را می‌توانید در [۳۸] و [۴۵] ببینید.

روش میش‌مست و همکاران (۲۰۰۶)

میش‌مست و همکاران در [۳۰] با معرفی سه پارامتر و استفاده از تعریف تکیه‌گاه فازی، مرکز فازی و α-برش یک عدد فازی به حل دستگاه‌های خطی فازی با متغیرهای فازی پرداختند.

روش خزرلو و همکاران (۲۰۱۰)

خزرلو و همکاران در [۲۴] برای عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{x} = (\underline{x(r)}, \overline{x(r)})$ با در نظر گرفتن $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$ و محاسبه α-برش برای هر عدد فازی، روشی را برای حل دستگاه‌های خطی فازی با متغیرهای فازی ارایه کردند.

روش منصوری و اسدی (۲۰۱۱)

منصوری و اسدی در [۲۷] با استفاده از روش حذفی گاوس[۱] به حل دستگاه‌های خطی فازی با متغیرهای فازی پرداختند. روش مشابه ببینید در [۳۳] .

روش عزتی (۲۰۱۱)

عزتی در [۱۴] با فرض وارون‌پذیر بودن ماتریس A و در نظرگرفتن $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ که برای هر $i = 1, ..., n$، $\tilde{x}_i = (\underline{x_i(r)}, \overline{x_i(r)})$ جوابی از دستگاه (۱.۱) تعریف کرد.

روش اوتادی و مصلح (۲۰۱۵)

اوتادی و مصلح در [۳۶] با استفاده از ماتریس‌های ساخته شده توسط فریدمن و همکاران در [۱۵] و سپس با استفاده از روش به کار رفته در [۱]، جوابی از دستگاه (۱.۱) تعریف کردند.

برخی روش‌های دیگر برای حل دستگاه (۱.۱) وجود دارد که در اصول مشابه روش های ذکر شده هستند. این روش‌ها را می‌توانید در [۵] و [۷]و [۸] و [۱۶]و [۴۲] و [۴۷] پیداکنید.

۳.۱.۱ حل دستگاه‌های خطی فازی با پارامترهای فازی

در این بخش انواع گوناگونی از دستگاه‌های خطی با پارامترهای فازی LR بازه‌ای[۲] و روش‌های حل آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

دستگاه خطی با پارامترهای فازی به صورت زیر است:

$$\tilde{A}x = \tilde{b}, \tag{۲.۱}$$

که در آن $\tilde{A} \in I(\mathbb{R}^{m\times n})$ و $\tilde{b} \in I(\mathbb{R}^m)$ داده شده است و ما به دنبال پیدا کردن $x \in \mathbb{R}^n$ به عنوان جوابی از مساله هستیم.

[1] Gaussian Elimination

[2] Fuzzy LR Interval Parameters Linear Systems

در ادامه روش‌های پیشنهادی سایر پژوهشگران را برای حل این‌گونه دستگاه‌ها ارایه و بررسی می‌کنیم.

روش عباس‌بندی و عزتی (۲۰۰۶)

عباس‌بندی و عزتی در [۳] با محاسبه فرم پارامتری هر عدد فازی روشی را برای محاسبه جواب تقریبی ارایه کردند.

روش امیرفخاریان (۲۰۰۷)

امیرفخاریان در [۹] با استفاده از تعریف عدد فازی مشابه با عدد فازی تعریف شده در [۱۵] و تبدیل دستگاه به دستگاه نرمال، روشی را برای حل این نوع دستگاه‌ها ارایه کرد. روش مشابه را در [۲] ببینید.

روش قنبری (۲۰۱۵)

قنبری در [۱۷] ابتدا شرایط لازم و کافی برای حل‌پذیری دستگاه (۲.۱) با پارامترهای فازی مثلثی را بیان کرد و سپس نشان داد می‌توان با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی جوابی برای دستگاه (۲.۱) پیدا کرد.

۴.۱.۱ حل دستگاه‌های خطی فازی با متغیرها و پارامترهای فازی

در این بخش انواع گوناگونی از دستگاه‌های خطی با پارامترها و متغیرهای فازی LR بازه‌ای[۱] و روش‌های حل آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

دستگاه خطی با متغیرها و پارامترهای فازی به صورت زیر است:

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \tag{۳.۱}$$

[1]Fully Fuzzy LR Interval Linear Systems

که در آن $\tilde{A} \in I(\mathbb{R}^{m\times n})$ و $\tilde{b} \in I(\mathbb{R}^{m})$ داده شده است و ما به دنبال پیدا کردن $\tilde{x} \in I(\mathbb{R}^{n})$ به عنوان جوابی از مساله هستیم. در ادامه روش‌های پیشنهادی سایر پژوهشگران را برای حل این‌گونه دستگاه‌ها ارایه و بررسی می‌کنیم.

روش الله ویرانلو و میکاییلوند (۲۰۱۱)

الله ویرانلو و میکاییلوند در [۶] با استفاده از حل یک مساله MOLP [۱] روشی برای محاسبه جواب دستگاه‌های خطی فازی با متغیرها و پارامترهای فازی ارایه کردند. روش مشابه را می‌توانید در [۴] ببینید.

روش کارتیک و همکاران (۲۰۱۳)

کارتیک و همکاران در [۲۳] با استفاده از تجزیه SVD [۲] به حل دستگاه‌های خطی فازی نوع سوم پرداختند. در این روش ابتدا ماتریس ضرایب را به یک ماتریس حقیقی مقدار تبدیل کرده سپس با استفاده از تجزیه SVD ماتریس به دست آمده جوابی برای دستگاه (۳.۱) محاسبه کردند. روش مشابه را می توانید در [۳۹] ببینید .

برخی روش‌های دیگر برای حل دستگاه (۳.۱) وجود دارد که در اصول مشابه روش های ذکر شده هستند. این روش‌ها را می‌توانید در [۳۷] و [۴۳] و [۴۴] ببینید.

[1] Multi Objective Linear Programming

[2] Singular Value Decomposition

۲.۱ روش کمترین مربعات برای حل دستگاه‌های خطی فازی LR مثلثی

قنبری و مهدوی‌امیری در [۱۹] روشی برای حل دستگاه‌های خطی فازی با متغیرهای فازی LR مثلثی بیان کردند. آن‌ها در [۱۹] ابتدا شرایط لازم و کافی برای حل‌پذیری یک دستگاه خطی فازی با متغیرهای فازی LR مثلثی را در قالب چند قضیه بیان کردند، سپس نشان دادند، می‌توان جواب دقیق و یا تقریبی را با استفاده از روش کمترین مربعات[۱] و حل یک مساله برنامه‌ریزی درجه دو[۲] محاسبه کرد. در این بخش روش ارایه شده را به طور کامل شرح می‌دهیم.

۱.۲.۱ بررسی حل پذیری دستگاه‌های خطی فازی LR مثلثی با متغیرهای فازی

در این بخش ابتدا به بررسی قضایایی روی حل‌پذیری دستگاه‌های خطی فازی LR مثلثی به صورت

$$A\tilde{x} = \tilde{b}, \tag{۴.۱}$$

که توسط قنبری و مهدوی امیری در [۱۹] بیان و اثبات شده است می‌پردازیم و سپس روش پیشنهادی آن‌ها را برای یافتن جواب تقریبی در صورت نداشتن جواب دقیق مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

دستگاه $A\tilde{x} = \tilde{b}$ را که در آن $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $\tilde{b} \in F(\mathbb{R}^m)_{LR}$ و $\tilde{x} \in F(\mathbb{R}^n)_{LR}$ است را به اختصار با FLRTVLS[۳] نشان دادند.

[1] Least Squares

[2] Quadratic Programming

[3] Fuzzy LR Triangular Variables Linear System

تعریف ۱.۲.۱. متناظر با ماتریس A برای این دستگاه، می‌توان دو ماتریس زیر را تعریف کرد:

$$(B^+)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & a_{ij} \geq 0, \\ 0, & a_{ij} < 0. \end{cases} \quad , \quad (B^-)_{ij} = \begin{cases} 0, & a_{ij} \geq 0, \\ a_{ij}, & a_{ij} < 0. \end{cases} \quad (۵.۱)$$

برای $i = 1, ..., m$ و $j = 1, ..., n$. همچنین داریم:

$$\tilde{x} = (x, \alpha, \beta)_{LR}, \quad \tilde{b} = (b, b^l, b^r)_{LR},$$

که در آن:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T, \quad b = (b_1, b_2, ..., b_n)^T,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T, \quad b^l = (b^l_1, b^l_2, ..., b^l_n)^T,$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)^T, \quad b^r = (b^r_1, b^r_2, ..., b^r_n)^T.$$

قضیه ۲.۲.۱ (قضیه اساسی $FLRTVLS$). [۲۰] در نظر بگیرید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $\tilde{b} \in F(\mathbb{R}^m)$. در این صورت $\tilde{x} = (x, \alpha, \beta)_{LR}$ یک جواب از (۴.۱) است، اگر و تنها اگر، $x \in \mathbb{R}^n$ و $(\alpha^T, \beta^T)^T$ به ترتیب جواب‌هایی از (۶.۱) و (۷.۱) باشند:

$$Ax = b, \quad (۶.۱)$$

$$\begin{bmatrix} B^+ & -B^- \\ -B^- & B^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^l \\ b^r \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \geq 0. \quad (۷.۱)$$

قضیه ۳.۲.۱. [۱۹] دستگاه خطی (۴.۱) جواب دارد ، اگر و تنها اگر، مساله برنامه‌ریزی خطی زیر

جواب بهینه با مقدار هدف بهینه صفر داشته باشد.

$$\begin{cases} min \qquad b^Tw + b^{lT}u + b^{rT}v \\ s.t. \\ A^Tw = 0, \\ B^{+T}u - B^{-T}v \geq 0, \\ -B^{-T}u + B^{+T}v \geq 0. \end{cases} \tag{۸.۱}$$

قضیه ۴.۲.۱. [۱۹] دستگاه (۴.۱) جواب دارد، اگر و تنها اگر، دستگاه زیر حل‌پذیر نباشد.

$$\begin{cases} b^Tw + b^{lT}u + b^{rT}v < 0, \\ A^Tw = 0, \\ B^{+T}u - B^{-T}v \geq 0, \\ -B^{-T}u + B^{+T}v \geq 0. \end{cases} \tag{۹.۱}$$

نتیجه ۵.۲.۱. [۱۹] اگر دستگاه زیر :

$$\begin{cases} b^{lT}u + b^{rT}v < 0, \\ B^{+T}u - B^{-T}v \geq 0, \\ -B^{-T}u + B^{+T}v \geq 0. \end{cases} \tag{۱۰.۱}$$

جواب داشته باشد، در این صورت دستگاه (۴.۱) حل‌پذیر نیست.

نتیجه ۶.۲.۱. [۱۹] اگر دستگاه زیر :

$$\begin{cases} b^{l^T} u < 0, \\ B^{+T} u \geq 0, \\ -B^{-T} u \geq 0. \end{cases} \tag{۱۱.۱}$$

جواب داشته باشد، در این صورت دستگاه (۴.۱) حل‌پذیر نیست.

نتیجه ۷.۲.۱. [۱۹] اگر دستگاه زیر :

$$\begin{cases} b^{r^T} v < 0, \\ B^{+T} v \geq 0, \\ -B^{-T} v \geq 0. \end{cases} \tag{۱۲.۱}$$

جواب داشته باشد، در این صورت دستگاه (۴.۱) حل‌پذیر نیست.

در ادامه قضیه ای را مبنی بر حل‌پذیری $A\tilde{x} = \tilde{b}$ زمانی‌که $Ax = b$ حل‌پذیر باشد، بیان کردند:

قضیه ۸.۲.۱. [۱۹] فرض کنید دستگاه (۶.۱) جواب داشته باشد، دستگاه (۴.۱) حل‌پذیر است، اگر و تنها اگر، دستگاه (۱۰.۱) حل‌پذیر نباشد. به عبارت دیگر زمانی که دستگاه $Ax = b$ حل‌پذیر باشد یکی از دو دستگاه (۴.۱) و (۱۰.۱) حل پذیر است.

روش کمترین مربعات برای محاسبه جواب تقریبی

قنبری و مهدوی‌امیری در [۱۹] بیان کردند درصورتی که این دستگاه جواب نداشته باشد می‌توان به دنبال جواب تقریبی بود. آن‌ها بیان کردند $\tilde{x}$ یک جواب تقریبی برای دستگاه (۴.۱) است اگر $A\tilde{x}$ کمترین فاصله را تا $\tilde{b}$ داشته باشد، که تابع فاصله استفاده شده در این روش، تابع فاصله مینگ و همکاران در [۲۹] است.

تعریف ۹.۲.۱. مینگ و همکاران در [۲۹] فاصله را برای دو عدد فازی دلخواه مانند $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)_{LR}^T$ و $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n)_{LR}^T$ که $\tilde{x}_i = (x_i, \alpha_i^x, \beta_i^x)_{LR}$ و $\tilde{y}_i = (y_i, \alpha_i^y, \beta_i^y)_{LR}$ برای هر $i = 1, ..., n$ به صورت زیر تعریف کرده است:

$$2D_n^2(\tilde{x}, \tilde{y}) = 4(x-y)^T(x-y) + (\alpha^y - \alpha^x)^T(\alpha^y - \alpha^x)$$
$$+(\beta^y - \beta^x)^T(\beta^y - \beta^x) + 2(x-y)^T(\beta^x - \alpha^x - \beta^y + \alpha^y), \qquad (۱۳.۱)$$

که در آن $x = (x_1, ..., x_n)^T$ و $y = (y_1, ..., y_n)^T$ و $\alpha^x = (\alpha_1^x, ..., \alpha_n^x)^T$ و $\beta^x = (\beta_1^x, ..., \beta_n^x)^T$ و $\alpha^y = (\alpha_1^y, ..., \alpha_n^y)^T$ و $\beta^y = (\beta_1^y, ..., \beta_n^y)^T$.

در ادامه برای هر $\tilde{x} \in F(\mathbb{R}^n)_{LR}$، باقی مانده در $\tilde{x}$ را به صورت زیر تعریف کردند:

$$r(\tilde{x}) = 2D_n^2(A\tilde{x}, \tilde{b}),$$

که $D_n^2(.,.)$ در تعریف ۹.۲.۱ آمده است. اکنون با حل مساله برنامه‌ریزی زیر می‌توان جواب دقیق و یا تقریبی دستگاه را محاسبه کرد:

$$\begin{cases} min \quad r(\tilde{x}) & = 2D_n^2(A\tilde{x}, \tilde{b})4(Ax-b)^T(Ax-b) \\ & +(B^+\alpha - B^-\beta - b^l)^T(B^+\alpha - B^-\beta - b^l) \\ & +(-B^-\alpha + B^+\beta - b^r)^T(-B^-\alpha + B^+\beta - b^r) \\ & +2(Ax-b)^T(-B^-\alpha + B^+\beta - B^+\alpha + B^-\beta + b^l - b^r) \\ s.t. & \\ \tilde{x} \in F(\mathbb{R}^n)_{LR}. & \end{cases} \qquad (۱۴.۱)$$

که در آن $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)_{LR}^T$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_m)_{LR}^T$ که $\tilde{x} = (x, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{b} = (b, b^l, b^r)$. حال با در نظر گرفتن ماتریس های $Q_{3n\times 3n}$ و $f_{3n\times 1}$ و $c_{1\times 1}$ به صورت

$$Q = \begin{bmatrix} 8A^TA & -2A^TA & 2A^TA \\ -2A^TA & 2(B^{+T}B^+ + B^{-T}B^-) & -2(B^{+T}B^- + B^{-T}B^+) \\ 2A^TA & -2(B^{+T}B^- + B^{-T}B^+) & 2(B^{+T}B^+ + B^{-T}B^-) \end{bmatrix}, \qquad (۱۵.۱)$$

$$f = \begin{bmatrix} -8A^Tb + 2A^Tb^l - 2A^Tb^r \\ 2A^Tb - 2B^{+T}b^l + 2B^{-T}b^r \\ -2A^Tb + 2B^{-T}b^l - 2B^{+T}b^r \end{bmatrix}, \tag{1.16}$$

$$c = 4b^Tb + b^{lT}b^l + b^{rT}b^r + 2b^T(b^r - b^l), \tag{1.17}$$

می‌توان $r(\tilde{x})$ را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$r(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x^T & \alpha^T & \beta^T \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + f^T \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + c, \tag{1.18}$$

که برای هر $\tilde{x} \in F(\mathbb{R}^n)_{LR}$، مقدار c ثابت است. پس می توان برای محاسبه جواب دقیق و یا تقریبی دستگاه (۱.۴) مساله برنامه‌ریزی درجه دو زیر را حل کرد:

$$\begin{cases} min \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x^T & \alpha^T & \beta^T \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + f^T \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ s.t. \\ \alpha, \beta \geq 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

که قید $\alpha, \beta \geq 0$ تضمین می کند $\tilde{x} = (x, \alpha, \beta)_{LR}$ یک جواب فازی مثلثی باشد.

۲.۲.۱ بررسی حل پذیری دستگاه‌های خطی فازی LR مثلثی با پارامترهای فازی

در این بخش مشابه روش پیشنهادی در [۱۹] روشی را برای محاسبه جواب دقیق و یا تقریبی دستگاه‌های خطی فازی LR مثلثی به صورت

$$\tilde{A}x = \tilde{b}, \tag{۲۰.۱}$$

ارایه خواهیم کرد.

تعریف ۱۰.۲.۱. متناظر با بردار $x = x^+ - x^-$ در این دستگاه، می‌توان تعریف کرد:

$$(x^+)_j = max\{0, x_j\}, \quad (x^-)_j = x_j^+ - x_j, \tag{۲۱.۱}$$

برای $j = 1, ..., n$.

روش کمترین مربعات برای محاسبه جواب تقریبی

مشابه با بخش قبل فاصله مینگ بین دو عدد فازی از رابطه (۱۳.۱) در تعریف ۹.۲.۱ محاسبه می‌شود. حال می توان برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، باقی مانده در x را به صورت زیر تعریف کرد:

$$r(x) = 2D_n^2(\tilde{A}x, \tilde{b}),$$

حال با حل مساله برنامه‌ریزی زیر جواب دقیق و یا تقریبی دستگاه را محاسبه کرد:

$$\begin{cases} min \quad r(x) & = 4(Ax-b)^T(Ax-b) \\ & +(A^\alpha x^+ + A^\beta x^- - b^l)^T(A^\alpha x^+ + A^\beta x^- - b^l) \\ & +(A^\beta x^+ + A^\alpha x^- - b^r)^T(A^\beta x^+ + A^\alpha x^- - b^r) \\ & +2(Ax-b)^T(A^\beta x^+ + A^\alpha x^- - A^\alpha x^+ - A^\beta x^- + b^l - b^r) \\ s.t. & \\ x \in \mathbb{R}^n. & \end{cases} \tag{۲۲.۱}$$

حال با در نظر گرفتن ماتریس های $Q_{۲n\times ۲n}$ و $f_{۲n\times ۱}$ و $c_{۱\times ۱}$ به صورت

$$Q=\begin{bmatrix} S & R \\ R & S \end{bmatrix}, \qquad (۲۳.۱)$$

که

$$S=۸A^TA+۲A^{\alpha T}A^{\alpha}+۲A^{\beta T}A^{\beta}-۲A^T(A^{\alpha}-A^{\beta})-۲(A^{\alpha}-A^{\beta})^TA,$$

$$R=-۸A^TA+۲A^{\alpha T}A^{\beta}+۲A^{\beta T}A^{\alpha}+۲A^T(A^{\alpha}-A^{\beta})+۲(A^{\alpha}-A^{\beta})^TA,$$

و

$$f=\begin{bmatrix} -۸A^Tb-۲A^{\alpha}b^{\alpha}-۲A^{\beta}b^{\beta}+۲A^T(b^{\alpha}-b^{\beta})+۲(A^{\alpha}-A^{\beta})b \\ ۸A^Tb-۲A^{\beta}b^{\alpha}-۲A^{\alpha}b^{\beta}-۲A^T(b^{\alpha}-b^{\beta})-۲(A^{\alpha}-A^{\beta})b \end{bmatrix}, \qquad (۲۴.۱)$$

$$c=۴b^Tb+b^{\alpha T}b^{\alpha}+b^{\beta T}b^{\beta}-۲b^T(b^{\alpha}-b^{\beta}), \qquad (۲۵.۱)$$

می‌توان $r(x)$ را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$r(\tilde{x})=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} x^{+T} & x^{-T} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x^{+} \\ x^{-} \end{bmatrix}+f^T\begin{bmatrix} x^{+} \\ x^{-} \end{bmatrix}+c, \qquad (۲۶.۱)$$

که برای هر $x\in\mathbb{R}^n$، مقدار c ثابت است. پس می توان برای محاسبه جواب تقریبی دستگاه (۲۰.۱) مساله برنامه‌ریزی درجه دو زیر را حل کرد:

$$\begin{cases} min \quad \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} x^{+T} & x^{-T} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x^{+} \\ x^{-} \end{bmatrix}+f^T\begin{bmatrix} x^{+} \\ x^{-} \end{bmatrix} \\ s.t. \\ x^{+},x^{-}\geq ۰, \\ x^{+T}x^{-}=۰. \end{cases} \qquad (۲۷.۱)$$

از آن‌جایی که مساله برنامه‌ریزی بالا، یک مساله برنامه‌ریزی درجه دو غیرمحدب[۱] و حل آن بسیار مشکل است، برای محاسبه جواب مساله (۲۷.۱)، مساله را بدون در نظر گرفتن شرط $x^{+T}.x^{-}=0$ حل می‌کنیم. پس از حل مساله برنامه‌ریزی بالا، اگر بردار جواب به دست آمده در شرط $x^{+T}.x^{-}=0$ صدق کرد، در این صورت $x=x^{+}-x^{-}$ را می‌توان به عنوان جواب دقیق و یا تقریبی از دستگاه (۲۰.۱) معرفی کرد. اما اگر $x^{+T}.x^{-}\neq 0$ ، آن‌گاه یک جواب دقیق و یا تقریبی دستگاه (۲۰.۱) را به صورت زیر می سازیم:

تعریف ۱۱.۲.۱. قرار دهید $y=x^{+}-x^{-}$. اکنون y^{+} و y^{-} را مشابه تعریف ۱۰.۲.۱ به دست می‌آید:

$$y_j^{+}=max\{0,y\},\quad y_j^{-}=y_j^{+}-y.$$

در این صورت بردار جدید $y=y^{+}+y^{-}$ جوابی دقیق و یا تقریبی برای دستگاه (۲۰.۱) خواهد بود.

۳.۱ روش کمترین مربعات برای حل دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای با متغیرهای فازی

در این‌جا، نخست شرایط لازم و کافی برای حل‌پذیری دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای مشابه با روش قنبری و مهدوی امیری در [۱۹] بیان و اثبات کردیم. سپس با استفاده از مدل کمترین مربعات و حل یک مساله برنامه‌ریزی درجه دو (تعمیم روش قنبری و مهدوی‌امیری در [۱۹])، جواب دقیق و یا تقریبی دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای را محاسبه می‌کنیم.

مشابه با قضیه‌ها و نتایج به دست آمده در [۱۹] می‌توان شرایط لازم و کافی برای حل‌پذیری این نوع دستگاه‌ها را در قالب چند قضیه بیان و اثبات کرد که از توضیح آن‌ها در این‌جا صرف نظر می‌کنیم.

[1] Non Convex

۱.۳.۱ روش کمترین مربعات برای محاسبه جواب تقریبی

در این‌جا مشابه با مفهوم جواب تقریبی پیشنهادی توسط قنبری و مهدوی‌امیری در [۱۹]، یک جواب تقریبی برای دستگاه FLRIVLS تعریف می‌کنیم. تابع فاصله مینگ و همکاران در [۲۹] برای دو بردار فازی بازه‌ای دلخواه $\tilde{x} = (x^l, x^r, x^\alpha, x^\beta)_{LR}$ و $\tilde{y} = (y^l, y^r, y^\alpha, y^\beta)_{LR}$ که برای هر $i = ۱, ..., n$، $\tilde{x}_i = (x_i^l, x_i^r, x_i^\alpha, x_i^\beta)_{LR}$ و $\tilde{y}_i = (y_i^l, y_i^r, y_i^\alpha, y_i^\beta)_{LR}$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} ۲D_n^۲(\tilde{x}, \tilde{y}) &= ۲(x^l - y^l)^T(x^l - y^l) + ۲(x^r - y^r)^T(x^r - y^r) \\ &-۲(x^l - y^l)^T(x^\alpha - y^\alpha) + ۲(x^r - y^r)^T(x^\beta - y^\beta) \\ &+(x^\alpha - y^\alpha)^T(x^\alpha - y^\alpha) + (x^\beta - y^\beta)^T(x^\beta - y^\beta). \end{aligned} \quad (۲۸.۱)$$

حال برای هر $\tilde{x} \in I(\mathbb{R}^n)_{LR}$، باقی مانده در $\tilde{x}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(\tilde{x}) = ۲D_n^۲(A\tilde{x}, \tilde{b}), \quad (۲۹.۱)$$

ملاحظه ۱.۳.۱. برای دستگاه (۱.۱) گوییم $\tilde{x}$ یک جواب دقیق است، اگر و تنها اگر، $r(\tilde{x}) = ۰$ باشد، در غیر این صورت جواب به دست آمده را یک جواب تقریبی گوییم.

در ادامه با حل مساله برنامه‌ریزی زیر جواب دقیق و یا تقریبی دستگاه (۱.۱) را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} min \quad r(\tilde{x}) = ۲(B^+x^l + B^-x^r - b^l)^T(B^+x^l + B^-x^r - b^l) \\ \qquad +۲(B^+x^r + B^-x^l - b^r)^T(B^+x^r + B^-x^l - b^r) \\ \qquad -۲(B^+x^l + B^-x^r - b^l)^T(B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha) \\ \qquad +۲(B^+x^r + B^-x^l - b^r)^T(B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta) \\ \qquad +(B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha)^T(B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha) \\ \qquad +(B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta)^T(B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta) \\ s.t. \\ \tilde{x} \in I(\mathbb{R}^n)_{LR}. \end{cases} \quad (۳۰.۱)$$

که در آن $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)^T_{LR}$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_m)^T_{LR}$.

قرار می‌دهیم:

$$S = B^{+T}B^{+} + B^{-T}B^{-}, \qquad R = B^{+T}B^{-} + B^{-T}B^{+},$$

حال با در نظر گرفتن ماتریس های $Q_{4n\times 4n}$ و $f_{4n\times 1}$ و $c_{1\times 1}$ به صورت

$$Q = \begin{bmatrix} 4S & 4R & -2S & 2R \\ 4R & 4S & -2R & 2S \\ -2S & -2R & 2S & -2R \\ 2R & 2S & -2R & 2S \end{bmatrix}_{4n\times 4n}, \tag{31.1}$$

$$f = \begin{bmatrix} -4B^{+T}b^l - 4B^{-T}b^r + 2B^{+T}b^\alpha - 2B^{-T}b^\beta \\ -4B^{-T}b^l - 4B^{+T}b^r + 2B^{-T}b^\alpha - 2B^{+T}b^\beta \\ 2B^{+T}b^l + 2B^{-T}b^r - 2B^{+T}b^\alpha + 2B^{-T}b^\beta \\ -2B^{-T}b^l - 2B^{+T}b^r + 2B^{-T}b^\alpha - 2B^{+T}b^\beta \end{bmatrix}_{4n\times 1}, \tag{32.1}$$

$$c = 2b^{lT}b^l + 2b^{rT}b^r + b^{\alpha T}b^\alpha + b^{\beta T}b^\beta - 2b^{lT}b^\alpha + 2b^{rT}b^\beta, \tag{33.1}$$

می‌توان $r(\tilde{x})$ را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$r(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x^{lT} & x^{rT} & x^{\alpha T} & x^{\beta T} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x^l \\ x^r \\ x^\alpha \\ x^\beta \end{bmatrix} + f^T \begin{bmatrix} x^l \\ x^r \\ x^\alpha \\ x^\beta \end{bmatrix} + c, \tag{34.1}$$

که برای هر $\tilde{x} \in I(\mathbb{R}^n)_{LR}$، مقدار c ثابت و ماتریس Q یک ماتریس متقارن است. پس می توان برای محاسبه جواب دقیق و یا تقریبی دستگاه (۱.۱) مساله برنامه‌ریزی درجه دو زیر را حل کرد:

$$\begin{cases} min \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x^{lT} & x^{rT} & x^{\alpha T} & x^{\beta T}\end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x^l \\ x^r \\ x^{\alpha} \\ x^{\beta}\end{bmatrix} + f^T \begin{bmatrix} x^l \\ x^r \\ x^{\alpha} \\ x^{\beta}\end{bmatrix} \\ s.t. \\ x^r - x^l \geq 0, \\ x^{\alpha}, x^{\beta} \geq 0. \end{cases} \tag{۳۵.۱}$$

برای حل مساله برنامه‌ریزی درجه دو (۳۵.۱) با استفاده از الگوریتم پیشنهادی توسط کلمن و لی در [۱۲] نیازی به مثبت معین بودن ماتریس Q در (۳۵.۱) نیست و کارایی خوبی در مسایل با اندازه بزرگ دارد، اما این الگوریتم تنها برای مسایلی با قیدهای کرانی قابل استفاده است. از این‌رو سعی می‌کنیم با استفاده از یک تغییر متغیر، قید اول در دستگاه (۳۵.۱) را به قید کرانی تبدیل کرده و سپس با استفاده از الگوریتم ناحیه اعتماد [۱۲] به حل دستگاه جدید به دست آمده می‌پردازیم. قرار می‌دهیم $x^r = x^l + x^t$ که $x^t \geq 0$ یک بردار دلخواه و هم بعد با بردار x^l است.

با محاسبه ماتریس Q_{new} و f_{new} و c_{new} به صورت زیر :

$$Q_{new} = \begin{bmatrix} 4(R+S) & 4(R+S) & -2(R+S) & 2(R+S) \\ 4(R+S) & 4S & -2R & 2S \\ -2(R+S) & -2R & 2S & -2R \\ 2(R+S) & 2S & -2R & 2S \end{bmatrix}_{4n\times 4n} , \tag{۳۶.۱}$$

$$f_{new}=\begin{bmatrix}-4A^Tb^l-4A^Tb^r+2A^Tb^\alpha-2A^Tb^\beta\\ -4B^{-T}b^l-4B^{+T}b^r-2B^{-T}b^\alpha-2B^{+T}b^\beta\\ 2B^{+T}b^l+2B^{-T}b^r-2B^{+T}b^\alpha+2B^{-T}b^\beta\\ -2B^{-T}b^l-2B^{+T}b^r+2B^{-T}b^\alpha-2B^{+T}b^\beta\end{bmatrix}_{4n\times 1}, \tag{۳۷.۱}$$

$$c_{new}=c, \tag{۳۸.۱}$$

می توان دستگاه (۳۵.۱) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} min \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}x^{lT} & x^{tT} & x^{\alpha T} & x^{\beta T}\end{bmatrix} Q_{new}\begin{bmatrix}x^l\\ x^t\\ x^\alpha\\ x^\beta\end{bmatrix}+f_{new}^T\begin{bmatrix}x^l\\ x^t\\ x^\alpha\\ x^\beta\end{bmatrix}\\ s.t.\\ x^t,x^\alpha,x^\beta\geq 0.\end{cases} \tag{۳۹.۱}$$

حال با محاسبه $\tilde{x}_{new}$ با استفاده از الگوریتم ناحیه اعتماد [۱۲]، جواب دستگاه (۳۵.۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{x}=(x^{lT},x^{lT}+x^{tT},x^{\alpha T},x^{\beta T})_{LR}.$$

حال با توجه به این که الگوریتم ناحیه اعتماد یک نوع الگوریتم نقطه درونی است مشابه با [۱۹] ، سه روش SIP و KKTIP و LSIP برای محاسبه نقطه اولیه درونی شدنی برای دستگاه (۳۹.۱) را معرفی می‌کنیم.

۱. نقطه اولیه ساده(SIP)

در این روش نقطه اولیه $\tilde{x}$ برای دستگاه (۳۹.۱) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$x_{SIP}=(-e^T,2e^T,e^T,e^T),$$

۲. نقطه اولیه کروش-کاهن-تاکر(KKTIP)

در این روش نقطه اولیه $\tilde{x}$ برای دستگاه (۳۹.۱)

$$X = argmin_{x^t \geq 0} \quad \|Q_{new} \begin{bmatrix} x^l \\ x^t \\ e_{n\times 1} \\ e_{n\times 1} \end{bmatrix} + f_{new}\|_2, \tag{۴۰.۱}$$

که

$$X = (x^{lT}, x^{tT})^T,$$

حال می‌توان نقطه اولیه برای دستگاه (۳۹.۱) را به صورت زیر نشان داد:

$$\tilde{x}_{KKTIP} = (x^{lT}, x^{tT}, x^{\alpha T}, x^{\beta T})_{LR}.$$

۳. نقطه اولیه کمترین مربعات(LSIP)

در این روش نقطه اولیه $\tilde{x}$ برای دستگاه (۲۱.۱)

$$(x^{lT}, x^{tT})^T = X = argmin_{x^t \geq 0} \quad \|A_{LS} \begin{bmatrix} x^l \\ x^t \end{bmatrix} - b_{LS}\|_2, \tag{۴۱.۱}$$

که

$$A_{LS} = \begin{bmatrix} A & B^- \\ A & B^+ \end{bmatrix}, b_{LS} = \begin{bmatrix} b^l \\ b^r \end{bmatrix}$$

در این صورت نقطه اولیه برای دستگاه (۳۹.۱) به روش زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{x}_{LSIP} = (x^{lT}, x^{tT}, x^{\alpha T}, x^{\beta T})_{LR}.$$

الگوریتم پیشنهادی این روش به صورت زیر است:

۲.۳.۱ نتایج عددی

در این بخش به مقایسه نتایج عددی حاصل از حل دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای $A\tilde{x} = \tilde{b}$ زمانی که ماتریس ضرایب $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ به صورت یک ماتریس مربعی و یا غیرمربعی، کامل و یا غیرکامل تولید می‌شود که مقدار m و n از میان سه مجموعه زیر انتخاب می‌شود:

$$small = \{10, 20, ..., 90\}, \quad medium = \{100, 200, ..., 500\}, \quad large = \{600, ..., 1000\}.$$

الگوریتم ۱ الگوریتم محاسبه جواب دقیق و جواب تقریبی.

۱: ماتریس A و بردار $\tilde{b}$ را بگیر.

۲: ماتریس های Q و f را طبق رابطه (۳۱.۱) و (۳۲.۱) محاسبه کن.

۳: ماتریس های Q_{new} و f_{new} را طبق رابطه (۳۶.۱) و (۳۷.۱) محاسبه کن.

۴: نقطه اولیه $\tilde{x}_{initial}$ را با استفاده از یکی از روش‌های SIP ، KKTIP و یا LSIP محاسبه کن.

۵: مساله برنامه‌ریزی درجه دو (۳۹.۱) را حل کن (با استفاده از الگوریتم پیشنهادی کلمن و لی در [۱۲]) و $(x^{l^*}, x^{t^*}, x^{\alpha^*}, x^{\beta^*})_{LR}$ را به عنوان جواب بهینه دستگاه (۳۹.۱) معرفی کن و قرار بده $x^{r^*} = x^{l^*} + x^{t^*}$.

۶: با استفاده از جواب بهینه به دست آمده در گام ۵ ، جواب دقیق و یا تقریبی دستگاه (۳۵.۱) را به صورت زیر محاسبه کن.

$$\tilde{x}^* = (x^{l^*}, x^{r^*}, x^{\alpha^*}, x^{\beta^*})_{LR}$$

۷: قرار بده $\tilde{x}^* = (x^{l^*}, x^{r^*}, x^{\alpha^*}, x^{\beta^*})_{LR}$. اگر $r(\tilde{x}^*) = 0$ در این صورت $\tilde{x}^*$ یک جواب دقیق برای دستگاه (۱.۱) است در غیر این صورت $\tilde{x}^*$ یک جواب تقریبی، برای دستگاه (۱.۱) است.

نتایج حاصل از حل دستگاه $A\tilde{x} = \tilde{b}$ برای حالت‌های مختلف m و n را در دو سطح زیر بررسی کردیم:

۱. ماتریس A و بردار $\tilde{b}$ به صورت کاملا تصادفی تولید می‌شوند.

۲. ماتریس A و بردار $\tilde{b}$ به گونه‌ای تولید می‌شوند که دستگاه (۶.۱) حل‌پذیر باشد.

پس از تولید ماتریس A و بردار $\tilde{b}$ و حل دستگاه $A\tilde{x} = \tilde{b}$ با استفاده از الگوریتم در دو سطح بالا، خطای نسبی برای هر جواب به دست آمده از مساله (۳۵.۱) از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$E(\tilde{x}_{approximate}) = \frac{r(\tilde{x}_{approximate}) - r(\tilde{x}_{best})}{r(\tilde{x}_{best})}, \qquad (۴۲.۱)$$

که $r(.)$ در رابطه (۳۴.۱) تعریف شده است. در جدول‌های ۱ و ۲ به ترتیب میانگین خطای نسبی به دست آمده برای سطح اول و دوم آورده شده است.

جدول ۱.۱: میانگین خطای نسبی برای سطح اول

بعد	مرتبه	اندازه	SIP	KKTIP	LSIP
		small	۴/۷۲E − ۰۶	۴/۱۲E − ۰۵	**۱.۹۵E-۰۸**
$m = n$	کامل	*medium*	۱/۳۱E − ۰۷	۵/۲۰E − ۰۷	**۶.۲۷E-۰۸**
		large	۴/۳۶E − ۰۸	۱/۷۷E − ۰۸	**۱.۱۷E-۰۸**
		small	۶/۸۳E − ۰۸	**۱.۸۲E-۰۸**	۲/۳۸E − ۰۸
$m = n$	غیرکامل	*medium*	۵/۳۵E − ۰۷	۳/۸۸E − ۰۸	**۳.۸۷E-۰۸**
		large	**۹.۸۸E-۰۹**	۳/۷۴E − ۰۷	۲/۸۹E − ۰۶
		small	**۱.۴۸E-۰۷**	۸/۲۰E − ۰۷	۲/۱۴E − ۰۶
$m < n$	کامل	*medium*	۷/۹۱E − ۰۸	**۷.۵۷E-۰۸**	۲/۸۳E − ۰۷
		large	**۷.۷۵E-۰۸**	۱/۳۱E − ۰۷	۳/۱۴E − ۰۷
		small	۱/۰۱E − ۰۷	۱/۸۰E − ۰۷	**۶.۷۰E-۰۸**
$m < n$	غیرکامل	*medium*	**۵.۸۶E-۰۸**	۶/۵۵E − ۰۸	۲/۱۶E − ۰۷
		large	۳/۲۱E − ۰۷	۳/۵۲E − ۰۷	**۲.۳۵E-۰۷**
		small	۴/۰۲E − ۰۹	**۲.۲۹E-۰۹**	۴/۶۸E − ۰۹
$m > n$	کامل	*medium*	**۵.۳۳E-۰۹**	۹/۷۰E − ۰۹	۸/۴۵E − ۰۹
		large	**۶.۳۹E-۰۹**	۸/۷۵E − ۰۹	۲/۵۰E − ۰۸
		small	۲/۹۴E − ۰۹	۲/۵۹E − ۰۹	**۷.۱۱E-۱۰**
$m > n$	غیرکامل	*medium*	**۴.۷۸E-۱۰**	۱/۲۸E − ۰۹	۸/۰۳E − ۰۹
		large	**۷.۵۰E-۰۹**	۲/۳۴E − ۰۸	۲/۰۱E − ۰۸

جدول ۲.۱: میانگین خطای نسبی برای سطح دوم

بعد	مرتبه	اندازه	SIP	KKTIP	LSIP
		small	۱/۴۷E − ۰۳	**۲.۴۴E-۰۹**	۱/۲۹E − ۰۱
$m = n$	کامل	*medium*	۱/۱۱E − ۰۷	۱/۵۷E − ۰۶	**۶.۹۰E-۰۹**
		large	۳/۲۹E − ۰۸	**۲.۹۸E-۰۸**	۳/۶۳E − ۰۷
		small	**۱.۹۹E-۰۸**	۶/۳۲E − ۰۸	۳/۱۰E − ۰۷
$m = n$	غیرکامل	*medium*	۳/۰۲E − ۰۷	۱/۰۵E − ۰۶	**۱.۵۹E-۰۷**
		large	۷/۳۲E − ۰۸	۱/۵۷E − ۰۷	**۱.۷۲E-۰۸**
		small	**۴.۰۳E-۰۸**	۵/۷۵E − ۰۸	۲/۲۳E − ۰۶
$m < n$	کامل	*medium*	۱/۲۶E − ۰۷	**۱.۲۵E-۰۷**	۱/۲۶E − ۰۷
		large	۳/۵۰E − ۰۷	۳/۳۵E − ۰۳	**۱.۸۵E-۰۷**
		small	۵/۸۸E − ۰۸	**۴.۲۱E-۰۸**	۶/۶۲E − ۰۸
$m < n$	غیرکامل	*medium*	**۱.۵۶E-۰۸**	۳/۲۵E − ۰۸	۳/۹۰E − ۰۷
		large	۵/۷۹E − ۰۷	۵/۷۸E − ۰۷	**۱.۶۷E-۰۷**
		small	**۴.۸۷E-۰۹**	۶/۸۱E − ۰۹	۱/۰۰E − ۰۸
$m > n$	کامل	*medium*	**۵.۴۶E-۰۹**	۵/۵۷E − ۰۹	۱/۲۸E − ۰۸
		large	۱/۱۳E − ۰۸	**۹.۲۳E-۰۹**	۱/۷۷E − ۰۸
		small	۲/۷۲E − ۰۹	۳/۷۲E − ۰۹	**۱.۶۰E-۰۹**
$m > n$	غیرکامل	*medium*	۲/۰۵E − ۰۸	۳/۱۶E − ۰۹	**۸.۵۰E-۱۰**
		large	**۴.۱۳E-۰۹**	۲/۲۷E − ۰۸	۱/۳۳E − ۰۸

۴.۱ روش کمترین مربعات برای حل دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای با پارامترهای فازی

در این جا به حل و بررسی نوع دیگری از دستگاه‌های خطی فازی با پارامترهای فازی LR بازه‌ای می‌پردازیم و سعی می کنیم بر پایه روش پیشنهادی در فصل سوم با نوشتن مدل کمترین مربعات و حل یک مساله برنامه‌ریزی درجه دو جوابی برای این نوع دستگاه ها محاسبه کنیم. مساله برنامه ریزی درجه دو به دست آمده در این فصل یک مساله برنامه‌ریزی غیر محدب و حل آن بسیار مشکل است، از این رو سعی کردیم با تبدیل آن به یک مساله برنامه‌ریزی محدب و ارایه یک تعریف، جواب دقیق و یا تقریبی برای این نوع دستگاه‌ها به دست آوریم.

متناظر با قضیه‌ها و نتایج به دست آمده در [۱۷] و [۱۹]، شرایط لازم و کافی برای حل‌پذیری دستگاه‌های خطی فازی با پارامترهای فازی را در قالب چند قضیه بیان و اثبات کردیم که از توضیح آن‌ها در این‌جا صرف نظر می‌کنیم.

۱.۴.۱ روش کمترین مربعات برای محاسبه جواب تقریبی

مشابه با روش پیشنهادی قنبری و مهدوی‌امیری در [۱۹] و تعریف ۱۰.۲.۱ و محاسبه $r(x) = ۲D_n^۲(\tilde{A}x, \tilde{b})$ می توان برای محاسبه جواب تقریبی دستگاه (۲.۱) مساله برنامه‌ریزی درجه دو زیر را حل کرد:

$$\begin{cases} min \quad \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} x^{+T} & x^{-T} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \end{bmatrix} + f^T \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \end{bmatrix} \\ s.t. \\ x^+, x^- \geq ۰, \\ x^{+T} x^- = ۰. \end{cases} \tag{۴۳.۱}$$

که Q و f و c مشابه فصل قبل قابل محاسبه هستند. از آن‌جایی که مساله برنامه‌ریزی (۴۳.۱)، یک مساله برنامه‌ریزی درجه دو غیر محدب و حل آن بسیار مشکل است، برای محاسبه جواب، مساله را بدون شرط $x^{+T}x^{-}=0$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} min & \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x^{+T} & x^{-T}\end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} x^{+} \\ x^{-}\end{bmatrix} + f^{T}\begin{bmatrix} x^{+} \\ x^{-}\end{bmatrix} \\ s.t. & \\ x^{+}, x^{-} \geq 0. & \end{cases} \tag{۴۴.۱}$$

پس از حل مساله برنامه‌ریزی (۴۴.۱)، اگر بردار جواب به دست آمده در شرط $x^{+T}x^{-}=0$ صدق کرد، در این صورت $x=x^{+}-x^{-}$ را می‌توان به عنوان جواب دقیق و یا تقریبی از دستگاه (۲.۱) معرفی کرد. درغیر این صورت اگر $x^{+T}x^{-}\neq 0$ ، ما یک جواب تقریبی برای دستگاه (۲.۱) را با استفاده از تعریف زیر می‌سازیم:

تعریف ۱.۴.۱. قرار دهید $y=x^{+}-x^{-}$. اکنون y^{+} و y^{-} را به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y_j^{+}=max\{0,y\}, \quad y_j^{-}=y_j^{+}-y. \tag{۴۵.۱}$$

در این صورت بردار جدید $y=y^{+}-y^{-}$ جواب دقیق و یا تقریبی برای دستگاه (۲.۱) خواهد بود.

الگوریتم ۶ الگوریتم پیشنهادی این روش را نشان می‌دهد.

در پایان مشابه با فصل قبل مقایسه‌ای بین خطای نسبی به وجود آمده برای جواب دقیق و یا تقریبی دستگاه (۲.۱) با استفاده از الگوریتم بالا در دو سطح انجام دادیم.

الگوریتم ۲ الگوریتم محاسبه جواب دقیق و یا تقریبی.

ماتریس‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{b}$ را بگیر.

ماتریس های f و Q را محاسبه کن.

نقطه اولیه $x_{initial}$ را با استفاده از یکی از روش‌های SIP ، KKTIP و یا LSIP محاسبه کن.

مساله برنامه‌ریزی درجه دو (۴۴.۱) را حل کن (با استفاده از الگوریتم پیشنهادی کلمن و لی در [۱۲]) و (x^{+^*}, x^{-^*}) را به عنوان جواب بهینه دستگاه (۴۴.۱) معرفی کن.

اگر در بردار جواب به دست آمده از حل دستگاه (۴۴.۱) داشتیم $x^{+^*}{}^T x^{-^*} = 0$ در این صورت قرار بده $x^* = (x^{+*T}, x^{-*T})^T$ و آن را به عنوان جواب بهینه دستگاه (۴۳.۱) معرفی کن، در غیر این صورت بردار جواب جدید برای دستگاه (۴۴.۱) را از رابطه (۴۵.۱) بساز و قرار بده $x^* = (y^{+*T}, y^{-*T})^T$ و x^{*T} را به عنوان جواب بهینه دستگاه (۴۴.۱) معرفی کن.

قرار بده $x^* = (x^{+*T}, x^{-*T})^T$. اگر $r(x^*) = 0$ در این صورت x^* یک جواب دقیق برای دستگاه (۲.۱) است در غیر این صورت x^* یک جواب تقریبی ، برای دستگاه (۲.۱) است.

۵.۱ حل دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای با استفاده از حل دستگاه‌های خطی فازی LR مثلثی

در این فصل، با استفاده از روش کمترین مربعات برای حل دستگاه‌های خطی فازی LR مثلثی به حل دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای می‌پردازیم. بنا به آن‌چه در فصل دوم بیان شد، قنبری و مهدوی امیری [۱۹] سعی کردند با کاهش فاصله بین $A\tilde{x}$ و $\tilde{b}$ جواب دستگاه خطی فازی LR مثلثی $A\tilde{x} = \tilde{b}$ را به دست آورند. در این فصل سعی می‌کنیم با تفکیک یک عدد فازی LR بازه‌ای به دو عدد فازی LR مثلثی و کاهش فاصله دو عدد فازی مثلثی به دست آمده، به حل دستگاه خطی فازی LR بازه‌ای بپردازیم، در واقع در این فصل نشان می‌دهیم می‌توان یک دستگاه خطی فازی LR بازه‌ای را به یک دستگاه خطی فازی LR مثلثی تبدیل کرد و سپس با استفاده از روش کمترین مربعات معرفی شده در فصل دوم به حل این دستگاه پرداخت.

جدول ۳.۱: میانگین خطای نسبی برای سطح اول

بعد	مرتبه	اندازه	SIP	KKTIP	LSIP
		small	۱٫۴۴E − ۱۵	۲٫۸۱E − ۱۵	۳.۲۲E-۱۶
$m = n$	کامل	medium	۵٫۳۸E − ۰۲	۸٫۱۱E − ۰۲	۲.۱۹E-۰۴
		large	۱٫۴۴E − ۰۱	۱.۱۶E-۰۱	۰٫۰۰E + ۰۰
		small	۳٫۸۸E − ۱۶	۶٫۶۴E − ۱۵	۹.۶۷E-۱۷
$m = n$	غیرکامل	medium	۵٫۳۷E − ۰۲	۷٫۱۵E − ۰۲	۴.۲۶E-۰۴
		large	۱٫۳۴E − ۰۱	۹.۹۰E-۰۲	۰٫۰۰E + ۰۰
		small	۳.۷۴E-۰۵	۵٫۳۷E − ۰۵	۱٫۷۵E − ۰۳
$m < n$	کامل	medium	۹٫۵۱E − ۰۲	۹٫۹۵E − ۰۲	۱.۱۱E-۰۳
		large	۱٫۰۴E − ۰۲	۴.۴۷E-۰۴	۹٫۹۷E − ۰۲
		small	۲٫۹۷E − ۰۵	۲.۲۱E-۰۵	۱٫۴۸E − ۰۳
$m < n$	غیرکامل	medium	۷٫۸۳E − ۰۲	۷٫۷۱E − ۰۲	۳.۸۸E-۰۳
		large	۱٫۰۹E − ۰۱	۹٫۰۱E − ۰۲	۳.۵۵E-۰۳
		small	۱٫۲۶E − ۰۴	۱٫۲۰E − ۰۴	۸.۰۴E-۰۵
$m > n$	کامل	medium	۲٫۹۲E − ۰۲	۶٫۱۶E − ۰۲	۴.۵۴E-۰۳
		large	۱.۱۲E-۰۲	۲٫۲۰E − ۰۲	۱٫۱۹E − ۰۲
		small	۲٫۱۲E − ۰۳	۲٫۴۴E − ۰۳	۳.۳۰E-۰۴
$m > n$	غیرکامل	medium	۲٫۲۹E − ۰۲	۶٫۳۹E − ۰۲	۱.۹۲E-۰۲
		large	۱٫۳۰E − ۰۱	۹٫۶۵E − ۰۲	۶.۹۷E-۰۳

جدول ۴.۱: میانگین خطای نسبی برای سطح دوم

بعد	مرتبه	اندازه	SIP	KKTIP	LSIP
		small	۱٫۴۴E − ۱۵	۲٫۸۱E − ۱۵	۳.۲۲E-۱۶
$m = n$	کامل	medium	۵٫۳۸E − ۰۲	۸٫۱۱E − ۰۲	۲.۱۹E-۰۴
		large	۱٫۴۴E − ۰۱	۱.۱۶E-۰۱	۰٫۰۰E + ۰۰
		small	۳٫۲۶E − ۱۶	۱.۵۷E-۱۶	۲٫۴۷E − ۱۶
$m = n$	غیرکامل	medium	۵٫۳۷E − ۰۲	۷٫۱۵E − ۰۲	۴.۲۶E-۰۴
		large	۱٫۳۴E − ۰۱	۹.۹۰E-۰۲	۰٫۰۰E + ۰۰
		small	۳.۷۴E-۰۵	۵٫۳۷E − ۰۵	۱٫۷۵E − ۰۳
$m < n$	کامل	medium	۹٫۵۱E − ۰۲	۹٫۹۵E − ۰۲	۱.۱۱E-۰۳
		large	۱٫۰۴E − ۰۲	۴.۴۷E-۰۴	۹٫۹۷E − ۰۲
		small	۲.۴۲E-۰۷	۴٫۶۸E − ۰۵	۴٫۷۶E − ۰۳
$m < n$	غیرکامل	medium	۸٫۹۵E − ۰۲	۹٫۲۰E − ۰۲	۲.۵۸E-۰۳
		large	۱٫۰۵E − ۰۱	۱٫۰۲E − ۰۱	۲.۱۹E-۰۳
		small	۴.۲۲E-۰۵	۶٫۵۹E − ۰۵	۵٫۰۶E − ۰۴
$m > n$	کامل	medium	۲٫۱۲E − ۰۲	۳٫۲۴E − ۰۲	۱.۸۶E-۰۲
		large	۵٫۵۵E − ۰۲	۶٫۵۶E − ۰۲	۹.۲۸E-۰۳
		small	۲٫۶۹E − ۰۳	۲٫۶۹E − ۰۳	۹.۰۳E-۰۴
$m > n$	غیرکامل	medium	۵٫۷۳E − ۰۲	۴٫۲۹E − ۰۲	۱.۶۳E-۰۲
		large	۱٫۳۵E − ۰۱	۱٫۲۶E − ۰۱	۲.۵۹E-۰۳

۱.۵.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۵.۱ (عدد فازی بازه‌ای تبدیل یافته). برای هر عدد فازی LR بازه‌ای دلخواه به‌صورت $\tilde{a} = (a^l, a^r, a^\alpha, a^\beta)_{LR}$ تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{a}_{left} = (a^l, a^\alpha, a^r - a^l + a^\beta)_{LR} \quad , \quad \tilde{a}_{right} = (a^r, a^r - a^l + a^\alpha, a^\beta)_{LR}$$

۶.۱ حل دستگاه های فازی تبدیل یافته با متغیرهای فازی

تعریف ۱.۶.۱. مطابق تعریف فوق، برای دو بردار فازی $\tilde{x}$ و $\tilde{b}$ در (۱.۰۱) می‌توان نوشت:

$$\tilde{x}_{left} = (x^l, x^\alpha, x^r - x^l + x^\beta)_{LR} \quad \tilde{x}_{right} = (x^r, x^r - x^l + x^\alpha, x^\beta)_{LR}$$

$$\tilde{b}_{left} = (b^l, b^\alpha, b^r - b^l + b^\beta)_{LR} \quad \tilde{b}_{right} = (b^r, b^r - b^l + b^\alpha, b^\beta)_{LR}$$

متناظر با اعداد فازی LR مثلثی فوق به‌دست می‌آید :

$$\tilde{x}_{new} = (x_{new}, x^\alpha_{new}, x^\beta_{new})_{LR} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{left} \\ \tilde{x}_{right} \end{bmatrix} \quad \tilde{b}_{new} = (x_{new}, x^\alpha_{new}, x^\beta_{new})_{LR} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{left} \\ \tilde{b}_{right} \end{bmatrix} \tag{۴۶.۱}$$

که در آن

$$x_{new} = \begin{bmatrix} x^l \\ x^r \end{bmatrix} \qquad x^\alpha_{new} = \begin{bmatrix} x^\alpha \\ x^r - x^l + x^\alpha \end{bmatrix} \qquad x^\beta_{new} = \begin{bmatrix} x^r - x^l + x^\beta \\ x^\beta \end{bmatrix}$$

$$b_{new} = \begin{bmatrix} b^l \\ b^r \end{bmatrix} \qquad b^\alpha_{new} = \begin{bmatrix} b^\alpha \\ b^r - b^l + b^\alpha \end{bmatrix} \qquad b^\beta_{new} = \begin{bmatrix} b^r - b^l + b^\beta \\ b^\beta \end{bmatrix}$$

تعریف ۲.۶.۱. با توجه به تعریف ماتریس های B^+ و B^- در (۵.۱) ماتریس A_{new} را به صورت زیر

تعریف می‌کنیم:

$$A_{new} = \begin{bmatrix} B^+ & B^- \\ B^- & B^+ \end{bmatrix} \Rightarrow B^+_{new} = \begin{bmatrix} B^+ & 0 \\ 0 & B^+ \end{bmatrix} \quad , \quad B^-_{new} = \begin{bmatrix} 0 & B^- \\ B^- & 0 \end{bmatrix} \tag{۴۷.۱}$$

تعریف ۳.۶.۱. دستگاه

$$A_{new}\tilde{x}_{new} = \tilde{b}_{new} \tag{۴۸.۱}$$

را دستگاه فازی LR مثلثی تبدیل یافته می‌نامیم.

حل پذیری

قضیه ۴.۶.۱ (قضیه اساسی FLRCVLS). ماتریس $A \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}$ و بردار $\tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^{2m})$ را در نظر بگیرید. $\tilde{x} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^{2n})$ یک جواب از (۶۰.۱) است، اگر و تنها اگر، $x_{new} = (x^{lT}, x^{rT})^T$ و $({x^\alpha_{new}}^T, {x^\beta_{new}}^T)^T$ به‌ترتیب جواب‌هایی از دو دستگاه زیر باشند:

$$\begin{cases} B^+x^l + B^-x^r = b^l \\ B^+x^r + B^-x^l = b^r \\ x^r \geq x^l \end{cases} \tag{۴۹.۱}$$

و

$$\begin{cases} B^+_{new}x^\alpha_{new} - B^-_{new}x^\beta_{new} = b^\alpha_{new} \\ B^+_{new}x^\beta_{new} - B^-_{new}x^\alpha_{new} = b^\beta_{new} \\ x^\alpha_{new}, x^\beta_{new} \geq 0 \end{cases} \tag{۵۰.۱}$$

قضیه ۵.۶.۱. بردار $\tilde{x} = (x^l, x^r, x^\alpha, x^\beta)$ یک جواب از (۱.۱) است، اگر و تنها اگر، $\tilde{x}_{new} = (x_{new}, x^\alpha_{new}, x^\beta_{new})$ جوابی از (۶۱.۱) و (۶۲.۱) باشد.

ملاحظه ۶.۶.۱. با توجه به قضیه فوق حل دستگاه n متغیره $A\tilde{x} = \tilde{b}$ معادل با حل دستگاه $2n$ متغیره $A_{new}\tilde{x}_{new} = \tilde{b}_{new}$ است.

حال با استفاده از روش قنبری و مهدوی امیری در [۱۹] ابتدا جواب دستگاه (۶۰.۱) را می‌یابیم، سپس با استفاده از تعریف زیر یک جواب تقریبی برای دستگاه خطی فازی LR بازه‌ای (۱.۱) ارایه خواهیم کرد.

تعریف ۷.۶.۱. فرض کنید $\tilde{x}_{new}$ جواب به‌دست آمده از حل مسئله برنامه‌ریزی درجه دو در [۱۹] باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_۱ = x^\alpha, \alpha_۲ = x^r - x^l + x^\alpha, \alpha_۳ = x^r - x^l + x^\beta, \alpha_۴ = x^\beta$$

$$\tilde{x}_{left} = (x^l, min\{\alpha_۱, \alpha_۲\}, max\{\alpha_۳, \alpha_۴\})$$

$$\tilde{x}_{right} = (x^r, max\{\alpha_۱, \alpha_۲\}, min\{\alpha_۳, \alpha_۴\})$$

در این‌صورت برای هر $i = ۱, ..., n$:

۱. اگر در بردار جواب به‌دست‌آمده $x_i^l \leq x_i^r$ در این‌صورت $\tilde{x}_i = (x_i^l, x_i^r, x_i^\alpha, x_i^\beta)$، i–امین درایه از بردار جواب برای دستگاه (۱.۱) خواهدبود.

۲. اگر در بردار جواب به‌دست‌آمده $x_i^l \geq x_i^r$ در این‌صورت $\tilde{x}_i = (x_i^r, x_i^l, x_i^r - x_i^l + x_i^\alpha, x_i^r - x_i^l + x_i^\beta)$ ، i–امین درایه از بردار جواب برای دستگاه (۱.۱) خواهد بود.

الگوریتم پیشنهادی این روش به صورت زیر است.

الگوریتم ۳ الگوریتم محاسبه جواب دقیق و یا جواب تقریبی.

۱: ماتریس‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{b}$ را بگیر.

۲: ماتریس‌های A_{new} و $\tilde{b}_{new}$ را بساز.

۳: ماتریس های f و Q را طبق روابط موجود در [۱۹] محاسبه کن.

۴: با استفاده از روش پیشنهادی قنبری و مهدوی‌امیری در [۱۹] دستگاه (۶۰.۱) را حل کن.

۵: $\tilde{x}^*$ را به‌عنوان جواب بهینه دستگاه (۶۰.۱) معرفی کن. اگر $r(\tilde{x}^*) = ۰$ در این‌صورت $\tilde{x}^*$ جوابی دقیق از دستگاه (۱.۱) است در غیر این‌صورت $\tilde{x}^*$ را به‌عنوان جوابی تقریبی از دستگاه (۱.۱) معرفی کن.

۱.۶.۱ حل دستگاه های فازی تبدیل یافته با پارامترهای فازی

تعریف ۸.۶.۱. حال برای ماتریس $\tilde{A} \in I(\mathbb{R}^{m\times n})_{LR}$ و بردار $\tilde{b} \in I(\mathbb{R}^m)_{LR}$ برای هر $i = 1, ..., m$ و $j = 1, ..., n$ می‌توان تعریف کرد:

$$\tilde{a}_{left}(i,j) = (a^l_{ij}, a^\alpha_{ij}, a^r_{ij} - a^l_{ij} + a^\beta_{ij})_{LR}, \quad \tilde{a}_{right}(i,j) = (a^r_{ij}, a^r_{ij} - a^l_{ij} + a^\alpha_{ij}, a^\beta_{ij})_{LR},$$

$$\tilde{b}_{left}(i) = (b^l_i, b^\alpha_i, b^r_i - b^l_i + b^\beta_i)_{LR}, \quad \tilde{b}_{right}(i) = (b^r_i, b^r_i - b^l_i + b^\alpha_i, b^\beta_i)_{LR}, \tag{۵۱.۱}$$

تعریف ۹.۶.۱. ماتریس $\tilde{A}_{new}$ و $\tilde{b}_{new}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_{new} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{left} & \tilde{A}_{right} \\ \tilde{A}_{right} & \tilde{A}_{left} \end{bmatrix}, \tilde{b}_{new} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{left} \\ \tilde{b}_{right} \end{bmatrix}. \tag{۵۲.۱}$$

تعریف ۱۰.۶.۱. با توجه به تعریف ماتریس $\tilde{A}_{new}$ در (۶۴.۱) داریم:

$$A^\alpha_{new} = \begin{bmatrix} A^\alpha & A^r - A^l + A^\alpha \\ A^r - A^l + A^\alpha & A^\alpha \end{bmatrix}, \quad A^\beta_{new} = \begin{bmatrix} A^r - A^l + A^\beta & A^\beta \\ A^\beta & A^r - A^l + A^\beta \end{bmatrix}, \tag{۵۳.۱}$$

و

$$A_{new} = \begin{bmatrix} A^l & A^r \\ A^r & A^l \end{bmatrix}, \quad A'_{new} = \begin{bmatrix} A^\alpha_{new} & -A^\beta_{new} \\ A^\beta_{new} & -A^\alpha_{new} \end{bmatrix}, \tag{۵۴.۱}$$

و برای بردار $\tilde{b}_{new}$ در (۶۴.۱) داریم:

$$b_{new} = \begin{bmatrix} b^l \\ b^r \end{bmatrix}, \quad b^\alpha_{new} = \begin{bmatrix} b^\alpha \\ b^r - b^l + b^\alpha \end{bmatrix}, \quad b^\beta_{new} = \begin{bmatrix} b^r - b^l + b^\beta \\ b^\beta \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱۱.۶.۱. متناظر با تعریف ماتریس‌های $x^+ = max\{0, x\}$ و $x^- = x^+ - x$ ، ماتریس‌های x^+_{new} و x^-_{new} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x^+_{new} = \begin{bmatrix} x^+_{n\times 1} \\ 0_{n\times 1} \end{bmatrix}, \quad x^-_{new} = \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ -x^-_{n\times 1} \end{bmatrix}. \tag{۵۵.۱}$$

که $x_{new} = x^+_{new} + x^-_{new}$.

تعریف ۱.۶.۱۲. دستگاه زیر

$$\tilde{A}_{new}x_{new} = \tilde{b}_{new}, \quad (۱.۵۶)$$

دستگاه فازی LR مثلثی تبدیل یافته می‌نامیم.

حل پذیری

قضیه ۱.۶.۱۳. [قضیه اساسی FLRCPLS] دستگاه (۱.۶۸) را در نظر بگیرید. $x_{new} \in \mathbb{R}^{2n}$ یک جواب از (۱.۶۸) است ، اگر و تنها اگر، $(x^{+T}, x^{-T})^T$ جوابی از دستگاه زیر باشد.

$$\begin{cases} A^l x^+ - A^r x^- = b^l, & (۱) \\ A^r x^+ - A^l x^- = b^r, & (۲) \\ A^\alpha x^+ + A^\beta x^- = b^\alpha, & (۳) \\ A^\beta x^+ + A^\alpha x^- = b^\beta, & (۴) \\ x^+, x^- \geq 0, & (۵) \\ x^{+T} x^- = 0. & (۶) \end{cases} \quad (۱.۵۷)$$

قضیه ۱.۶.۱۴. بردار $x \in \mathbb{R}^n$ جوابی برای دستگاه (۱.۲) است، اگر و تنها اگر، x_{new} جوابی از دستگاه (۱.۶۹) باشد.

ملاحظه ۱.۶.۱۵. با توجه به قضیه فوق حل دستگاه n متغیره $\tilde{A}x = \tilde{b}$ معادل با حل دستگاه $2n$ متغیره $\tilde{A}_{new}x_{new} = \tilde{b}_{new}$ است.

فرض کنیم x^+_{new} و x^-_{new} جواب‌های به دست آمده از حل مساله برنامه‌ریزی درجه دو (۱.۶۸) باشند، در این صورت بردار جواب $x \in \mathbb{R}^n$ برای دستگاه (۱.۲) را با استفاده از تعریف زیر می‌سازیم.

تعریف ۱۶.۶.۱. برای هر $j = 1, .., n$، تعریف می‌کنیم:

۱. اگر $x^-_{newj} = x^+_{newj+n} = 0$، در این صورت با توجه به تعریف ۱۱.۸.۱ برای x^+_{new} و x^-_{new} داریم:

۱.۱ اگر $x^+_j x^-_j = 0$، در این صورت $x_j = x^+_j - x^-_j$ را j-امین جز از بردار جواب برای دستگاه (۲.۱) می‌نامیم.

۲.۱. اگر $x^+_j x^-_j \neq 0$، در این صورت j-امین جز از بردار جواب برای دستگاه (۲.۱) را مشابه با تعریف ۱۰.۲.۱ می‌سازیم.

۲. اگر $x^+_{newj+n} = 0$ ولی $x^-_{newj} \neq 0$، آن گاه قرار می دهیم $x^-_{newj+n} = x^-_{newj}$ و $x^-_{newj} = 0$. در این صورت با در نظر گرفتن بردارهای جدید x^+ و x^- داریم:

۱.۲. اگر $x^+_j x^-_j = 0$، در این صورت $x_j = x^+_j - x^-_j$ برابر با j-امین جز از بردار جواب برای دستگاه (۲.۱) است.

۲.۲. اگر $x^+_j x^-_j \neq 0$، در این صورت j-امین جز از بردار جواب برای دستگاه (۲.۱) را مشابه تعریف ۱۰.۲.۱ می سازیم.

۳. اگر $x^-_{newj} = 0$ ولی $x^+_{newj+n} \neq 0$، آن گاه قرار می‌دهیم $x^+_{newj+n} = x^+_{newj}$ و $x^+_{newj+n} = 0$. در این صورت با در نظر گرفتن بردارهای جدید x^+ و x^- مشابه قسمت ۲، j-امین جز از بردار جواب برای دستگاه (۲.۱) را می‌سازیم.

الگوریتم پیشنهادی این روش به‌صورت زیر است:

۷.۱ حل دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای با استفاده از حل دستگاه‌های خطی فازی LR مثلثی

در این فصل، با استفاده از روش کمترین مربعات برای حل دستگاه‌های خطی فازی LR مثلثی به حل دستگاه‌های خطی فازی LR بازه‌ای می‌پردازیم. بنا به آن‌چه در فصل دوم بیان شد، قنبری و مهدوی امیری [۱۹] سعی کردند با کاهش فاصله بین $A\tilde{x}$ و $\tilde{b}$ جواب دستگاه خطی فازی LR مثلثی $A\tilde{x} = \tilde{b}$

الگوریتم ۴ الگوریتم محاسبه جواب و جواب تقریبی.

۱: ماتریس $\tilde{A}$ و بردار $\tilde{b}$ را بگیر.

۲: ماتریس‌های $\tilde{A}_{new}$ و $\tilde{b}_{new}$ رابساز.

۳: ماتریس های Q و f را محاسبه کن.

۴: دستگاه (۶۸.۱) را با استفاده از روش پیشنهادی قنبری و مهدوی امیری در [۱۹] حل کن.

۵: برای بردار جواب به دست آمده از گام ۴، مشابه با تعریف ۱۶.۸.۱ جواب دستگاه (۲.۱) را محاسبه کن.

۶: قرار بده x^* را به عنوان جواب بهینه مساله (۲.۱). اگر $r(x^*) = 0$ در این‌صورت x^* یک جواب دقیق برای دستگاه (۲.۱) است در غیر این‌صورت x^* یک جواب تقریبی ، برای دستگاه (۲.۱) است.

را به دست آورند. در این فصل سعی می‌کنیم با تفکیک یک عدد فازی LR بازه‌ای به دو عدد فازی LR مثلثی و کاهش فاصله دو عدد فازی مثلثی به دست آمده، به حل دستگاه خطی فازی LR بازه‌ای بپردازیم، در واقع در این فصل نشان می‌دهیم می‌توان یک دستگاه خطی فازی LR بازه‌ای را به یک دستگاه خطی فازی LR مثلثی تبدیل کرد و سپس با استفاده از روش کمترین مربعات معرفی شده در فصل دوم به حل این دستگاه پرداخت.

۱.۷.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۷.۱ (عدد فازی بازه‌ای تبدیل یافته). برای هر عدد فازی LR بازه‌ای دلخواه به‌صورت $\tilde{a} = (a^l, a^r, a^\alpha, a^\beta)_{LR}$ تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{a}_{left} = (a^l, a^\alpha, a^r - a^l + a^\beta)_{LR} \quad , \quad \tilde{a}_{right} = (a^r, a^r - a^l + a^\alpha, a^\beta)_{LR}$$

۸.۱ حل دستگاه های فازی تبدیل یافته با متغیرهای فازی

تعریف ۱.۸.۱. مطابق تعریف فوق، برای دو بردار فازی $\tilde{x}$ و $\tilde{b}$ در (۱.۱) می‌توان نوشت:

$$\tilde{x}_{left} = (x^l, x^\alpha, x^r - x^l + x^\beta)_{LR} \quad \tilde{x}_{right} = (x^r, x^r - x^l + x^\alpha, x^\beta)_{LR}$$

$$\tilde{b}_{left} = (b^l, b^\alpha, b^r - b^l + b^\beta)_{LR} \quad \tilde{b}_{right} = (b^r, b^r - b^l + b^\alpha, b^\beta)_{LR}$$

متناظر با اعداد فازی LR مثلثی فوق به‌دست می‌آید :

$$\tilde{x}_{new} = (x_{new}, x^\alpha_{new}, x^\beta_{new})_{LR} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{left} \\ \tilde{x}_{right} \end{bmatrix} \quad \tilde{b}_{new} = (x_{new}, x^\alpha_{new}, x^\beta_{new})_{LR} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{left} \\ \tilde{b}_{right} \end{bmatrix} \tag{۵۸.۱}$$

که در آن

$$x_{new} = \begin{bmatrix} x^l \\ x^r \end{bmatrix} \qquad x^\alpha_{new} = \begin{bmatrix} x^\alpha \\ x^r - x^l + x^\alpha \end{bmatrix} \qquad x^\beta_{new} = \begin{bmatrix} x^r - x^l + x^\beta \\ x^\beta \end{bmatrix}$$

$$b_{new} = \begin{bmatrix} b^l \\ b^r \end{bmatrix} \qquad b^\alpha_{new} = \begin{bmatrix} b^\alpha \\ b^r - b^l + b^\alpha \end{bmatrix} \qquad b^\beta_{new} = \begin{bmatrix} b^r - b^l + b^\beta \\ b^\beta \end{bmatrix}$$

تعریف ۲.۸.۱. با توجه به تعریف ماتریس های B^+ و B^- در (۵.۱) ماتریس A_{new} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_{new} = \begin{bmatrix} B^+ & B^- \\ B^- & B^+ \end{bmatrix} \Rightarrow B^+_{new} = \begin{bmatrix} B^+ & 0 \\ 0 & B^+ \end{bmatrix} \quad , \quad B^-_{new} = \begin{bmatrix} 0 & B^- \\ B^- & 0 \end{bmatrix} \tag{۵۹.۱}$$

تعریف ۳.۸.۱. دستگاه

$$A_{new}\tilde{x}_{new} = \tilde{b}_{new} \tag{۶۰.۱}$$

را دستگاه فازی LR مثلثی تبدیل یافته می‌نامیم.

حل پذیری

قضیه ۴.۸.۱ (قضیه اساسی FLRCVLS). ماتریس $A \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}$ و بردار $\tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^{2m})$ را در نظر بگیرید. $\tilde{x} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^{2n})$ یک جواب از (۶۰.۱) است، اگر و تنها اگر، $x_{new} = (x^{lT}, x^{rT})^T$ و $({x_{new}^{\alpha}}^T, {x_{new}^{\beta}}^T)^T$ به‌ترتیب جواب‌هایی از دو دستگاه زیر باشند:

$$\begin{cases} B^{+}x^{l} + B^{-}x^{r} = b^{l} \\ B^{+}x^{r} + B^{-}x^{l} = b^{r} \\ x^{r} \geq x^{l} \end{cases} \tag{۶۱.۱}$$

و

$$\begin{cases} B_{new}^{+}x_{new}^{\alpha} - B_{new}^{-}x_{new}^{\beta} = b_{new}^{\alpha} \\ B_{new}^{+}x_{new}^{\beta} - B_{new}^{-}x_{new}^{\alpha} = b_{new}^{\beta} \\ x_{new}^{\alpha}, x_{new}^{\beta} \geq 0 \end{cases} \tag{۶۲.۱}$$

قضیه ۵.۸.۱. بردار $\tilde{x} = (x^l, x^r, x^{\alpha}, x^{\beta})$ یک جواب از (۱.۱) است، اگر و تنها اگر، $\tilde{x}_{new} = (x_{new}, x_{new}^{\alpha}, x_{new}^{\beta})$ جوابی از (۶۱.۱) و (۶۲.۱) باشد.

ملاحظه ۶.۸.۱. با توجه به قضیه فوق حل دستگاه n متغیره $A\tilde{x} = \tilde{b}$ معادل با حل دستگاه $2n$ متغیره $A_{new}\tilde{x}_{new} = \tilde{b}_{new}$ است.

حال با استفاده از روش قنبری و مهدوی امیری در [۱۹] ابتدا جواب دستگاه (۶۰.۱) را می‌یابیم، سپس با استفاده از تعریف زیر یک جواب تقریبی برای دستگاه خطی فازی LR بازه‌ای (۱.۱) ارایه خواهیم کرد.

تعریف ۷.۸.۱. فرض کنید $\tilde{x}_{new}$ جواب به‌دست آمده از حل مسئله برنامه‌ریزی درجه دو در [۱۹] باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_1 = x^{\alpha}, \alpha_2 = x^{r} - x^{l} + x^{\alpha}, \alpha_3 = x^{r} - x^{l} + x^{\beta}, \alpha_4 = x^{\beta}$$

$$\tilde{x}_{left} = (x^l, min\{\alpha_1, \alpha_2\}, max\{\alpha_3, \alpha_4\})$$

$$\tilde{x}_{right} = (x^r, max\{\alpha_1, \alpha_2\}, min\{\alpha_3, \alpha_4\})$$

در این‌صورت برای هر $i = 1, ..., n$:

۱. اگر در بردار جواب به‌دست‌آمده $x_i^l \leq x_i^r$ در این‌صورت $\tilde{x}_i = (x_i^l, x_i^r, x_i^\alpha, x_i^\beta)$، i-امین درایه از بردار جواب برای دستگاه (۱.۱) خواهدبود.

۲. اگر در بردار جواب به‌دست‌آمده $x_i^l \geq x_i^r$ در این‌صورت $\tilde{x}_i = (x_i^r, x_i^l, x_i^r - x_i^l + x_i^\alpha, x_i^r - x_i^l + x_i^\beta)$ ، i-امین درایه از بردار جواب برای دستگاه (۱.۱) خواهد بود.

الگوریتم پیشنهادی این روش به صورت زیر است.

الگوریتم ۵ الگوریتم محاسبه جواب دقیق و یا جواب تقریبی.

۱: ماتریس‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{b}$ را بگیر.

۲: ماتریس‌های A_{new} و $\tilde{b}_{new}$ را بساز.

۳: ماتریس های f و Q را طبق روابط موجود در [۱۹] محاسبه کن.

۴: با استفاده از روش پیشنهادی قنبری و مهدوی‌امیری در [۱۹] دستگاه (۶۰.۱) را حل کن.

۵: $\tilde{x}^*$ را به‌عنوان جواب بهینه دستگاه (۶۰.۱) معرفی کن. اگر $r(\tilde{x}^*) = 0$ در این‌صورت $\tilde{x}^*$ جوابی دقیق از دستگاه (۱.۱) است در غیر این‌صورت $\tilde{x}^*$ را به‌عنوان جوابی تقریبی از دستگاه (۱.۱) معرفی کن.

۱.۸.۱ حل دستگاه های فازی تبدیل یافته با پارامترهای فازی

تعریف ۱.۸.۸. حال برای ماتریس $\tilde{A} \in I(\mathbb{R}^{m\times n})_{LR}$ و بردار $\tilde{b} \in I(\mathbb{R}^m)_{LR}$ برای هر $i = 1, ..., m$ و $j = 1, ..., n$ می‌توان تعریف کرد:

$$\tilde{a}_{left}(i,j) = (a_{ij}^l, a_{ij}^\alpha, a_{ij}^r - a_{ij}^l + a_{ij}^\beta)_{LR}, \quad \tilde{a}_{right}(i,j) = (a_{ij}^r, a_{ij}^r - a_{ij}^l + a_{ij}^\alpha, a_{ij}^\beta)_{LR},$$

$$\tilde{b}_{left}(i) = (b_i^l, b_i^\alpha, b_i^r - b_i^l + b_i^\beta)_{LR}, \quad \tilde{b}_{right}(i) = (b_i^r, b_i^r - b_i^l + b_i^\alpha, b_i^\beta)_{LR}, \tag{۶۳.۱}$$

تعریف ۹.۸.۱. ماتریس $\tilde{A}_{new}$ و $\tilde{b}_{new}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_{new} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{left} & \tilde{A}_{right} \\ \tilde{A}_{right} & \tilde{A}_{left} \end{bmatrix}, \tilde{b}_{new} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{left} \\ \tilde{b}_{right} \end{bmatrix}. \tag{۶۴.۱}$$

تعریف ۱۰.۸.۱. با توجه به تعریف ماتریس $\tilde{A}_{new}$ در (۶۴.۱) داریم:

$$A_{new}^\alpha = \begin{bmatrix} A^\alpha & A^r - A^l + A^\alpha \\ A^r - A^l + A^\alpha & A^\alpha \end{bmatrix}, \quad A_{new}^\beta = \begin{bmatrix} A^r - A^l + A^\beta & A^\beta \\ A^\beta & A^r - A^l + A^\beta \end{bmatrix}, \tag{۶۵.۱}$$

و

$$A_{new} = \begin{bmatrix} A^l & A^r \\ A^r & A^l \end{bmatrix}, \quad A'_{new} = \begin{bmatrix} A_{new}^\alpha & -A_{new}^\beta \\ A_{new}^\beta & -A_{new}^\alpha \end{bmatrix}, \tag{۶۶.۱}$$

و برای بردار $\tilde{b}_{new}$ در (۶۴.۱) داریم:

$$b_{new} = \begin{bmatrix} b^l \\ b^r \end{bmatrix}, \quad b_{new}^\alpha = \begin{bmatrix} b^\alpha \\ b^r - b^l + b^\alpha \end{bmatrix}, \quad b_{new}^\beta = \begin{bmatrix} b^r - b^l + b^\beta \\ b^\beta \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱۱.۸.۱. متناظر با تعریف ماتریس‌های $x^+ = max\{۰, x\}$ و $x^- = x^+ - x$ ، ماتریس‌های x_{new}^+ و x_{new}^- را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{new}^+ = \begin{bmatrix} x_{n\times ۱}^+ \\ ۰_{n\times ۱} \end{bmatrix}, \quad x_{new}^- = \begin{bmatrix} ۰_{n\times ۱} \\ -x_{n\times ۱}^- \end{bmatrix}. \tag{۶۷.۱}$$

که $x_{new} = x_{new}^+ + x_{new}^-$.

تعریف ۱۲.۸.۱. دستگاه زیر

$$\tilde{A}_{new} x_{new} = \tilde{b}_{new}, \tag{۶۸.۱}$$

دستگاه فازی LR مثلثی تبدیل یافته می‌نامیم.

حل پذیری

قضیه ۱۳.۸.۱. [قضیه اساسی FLRCPLS] دستگاه (۶۸.۱) را در نظر بگیرید. $x_{new} \in \mathbb{R}^{2n}$ یک جواب از (۶۸.۱) است ، اگر و تنها اگر، $(x^{+T}, x^{-T})^T$ جوابی از دستگاه زیر باشد.

$$\begin{cases} A^l x^+ - A^r x^- = b^l, & (1) \\ A^r x^+ - A^l x^- = b^r, & (2) \\ A^\alpha x^+ + A^\beta x^- = b^\alpha, & (3) \\ A^\beta x^+ + A^\alpha x^- = b^\beta, & (4) \\ x^+, x^- \geq 0, & (5) \\ x^{+T} x^- = 0. & (6) \end{cases} \qquad (69.1)$$

قضیه ۱۴.۸.۱. بردار $x \in \mathbb{R}^n$ جوابی برای دستگاه (۲.۱) است، اگر و تنها اگر، x_{new} جوابی از دستگاه (۶۹.۱) باشد.

ملاحظه ۱۵.۸.۱. با توجه به قضیه فوق حل دستگاه n متغیره $\tilde{A}x = \tilde{b}$ معادل با حل دستگاه $2n$ متغیره $\tilde{A}_{new} x_{new} = \tilde{b}_{new}$ است.

فرض کنیم x^+_{new} و x^-_{new} جواب‌های به دست آمده از حل مساله برنامه‌ریزی درجه دو (۶۸.۱) باشند، در این صورت بردار جواب $x \in \mathbb{R}^n$ برای دستگاه (۲.۱) را با استفاده از تعریف زیر می‌سازیم.

تعریف ۱۶.۸.۱. برای هر $j = 1, .., n$، تعریف می‌کنیم:

۱. اگر $x^-_{new j} = x^+_{new j+n} = 0$، در این صورت با توجه به تعریف ۱۱.۸.۱ برای x^+_{new} و x^-_{new} داریم:

۱.۱ اگر $x^+_j x^-_j = 0$، در این صورت $x_j = x^+_j - x^-_j$ را j−امین جز از بردار جواب برای دستگاه (۲.۱) می‌نامیم.

۲.۱. اگر $x_j^+ x_j^- \neq 0$، در این صورت j−امین جز از بردار جواب برای دستگاه (۲.۱) را مشابه با تعریف ۱۰.۲.۱ می‌سازیم.

۲. اگر $x^+_{newj+n} = 0$ ولی $x^-_{newj} \neq 0$، آن گاه قرار می دهیم $x^-_{newj+n} = x^-_{newj}$ و $x^-_{newj} = 0$. در این صورت با در نظر گرفتن بردارهای جدید x^+ و x^- داریم:

۱.۲. اگر $x_j^+ x_j^- = 0$، در این صورت $x_j = x_j^+ - x_j^-$ برابر با j−امین جز از بردار جواب برای دستگاه (۲.۱) است.

۲.۲. اگر $x_j^+ x_j^- \neq 0$، در این صورت j−امین جز از بردار جواب برای دستگاه (۲.۱) را مشابه تعریف ۱۰.۲.۱ می سازیم.

۳. اگر $x^-_{newj} = 0$ ولی $x^+_{newj+n} \neq 0$، آن گاه قرار می‌دهیم $x^+_{newj+n} = x^+_{newj}$ و $x^+_{newj+n} = 0$. در این صورت با در نظر گرفتن بردارهای جدید x^+ و x^- مشابه قسمت ۲، j−امین جز از بردار جواب برای دستگاه (۲.۱) را می‌سازیم.

الگوریتم پیشنهادی این روش به‌صورت زیر است:

الگوریتم ۶ الگوریتم محاسبه جواب و جواب تقریبی.

۱: ماتریس $\tilde{A}$ و بردار $\tilde{b}$ را بگیر.

۲: ماتریس‌های $\tilde{A}_{new}$ و $\tilde{b}_{new}$ رابساز.

۳: ماتریس های Q و f را محاسبه کن.

۴: دستگاه (۶۸.۱) را با استفاده از روش پیشنهادی قنبری و مهدوی امیری در [۱۹] حل کن.

۵: برای بردار جواب به دست آمده از گام ۴، مشابه با تعریف ۱۶.۸.۱ جواب دستگاه (۲.۱) را محاسبه کن.

۶: قرار بده x^* را به عنوان جواب بهینه مساله (۲.۱). اگر $r(x^*) = 0$ در این‌صورت x^* یک جواب دقیق برای دستگاه (۲.۱) است در غیر این‌صورت x^* یک جواب تقریبی ، برای دستگاه (۲.۱) است.

مراجع

[1] Abbasbandy. S, Alavi. M. A method for solving fuzzy linear systems. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2(2):37–43, 2005.

[2] Abbasbandy. S, Amirfakharian. M. The nearest approximation of a fuzzy quantity in parametric form. *Applied Mathematics and Computation*, 172:624–632, 2006.

[3] Abbasbandy. S, Ezzati. R. Crisp solution of a general fuzzy linear system. *Journal of Scientific Computing*, 16:19–25, 2006.

[4] Abolmasoum. M, Alavi. M. A method for calculating interval linear system. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 8:193–204, 2014.

[5] Allahviranloo. T, Ghanbari. M. On the algebraic solution of fuzzy linear systems based on interval theory. *Applied Mathematical Modelling*, 36:5360–5379, 2012.

[6] Allahviranloo. T, Mikaeilvand. N. Fully fuzzy linear systems solving using MOLP. *World Applied Sciences Journal*, 12(12):2268–2273, 2011.

[7] Allahviranloo. T, Salahshour. S. Fuzzy symmetric solutions of fuzzy linear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235:4545–4553, 2011.

[8] Allahviranloo.T, Nuraei. R, Ghanbari. M Haghi. E Hosseinzadeh. A. A. A new metric for lr fuzzy numbers and its application in fuzzy linear systems. *Soft Computing*, 16:1743–1754, 2012.

[9] Amirfakharian, M. Numerical solution of a fuzzy system of linear equations with polynomial parametric form. *International Journal of Computer Mathematics*, 84(7):1089–1097, 2007.

[10] Behera. D, Chakraverty. S. Fuzzy center based solution of fuzzy complex linear system of equations. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 21(4):629–642, 2013.

[11] Chakraverty. S, Behera. D. Fuzzy system of linear equations with crisp coefficients. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 25:201–207, 2013.

[12] Coleman. T. F, Li. Y. A reflective newton method for minimizing a quadratic function subject to bounds on some of the variables. *SIAM Journal Optimization*, 6(4):1040–1058, 1996.

[13] Dai. S Wang. S, Wang. K. M-preconditioner for solving fuzzy linear system. *Computational Mathematics and Modeling*, 26(4), 2015.

[14] Ezzati, R. Solving fuzzy linear systems. *Soft Computing*, 15:193–197, 2011.

[15] Friedman. M, Ming. M, Kandel. A. Fuzzy linear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, pp. 201–209, 1998.

[16] Ganbari, M. New concepts on the fuzzy linear systems and an application. *International Journal of Industrial Mathematics*, 6(4):333–343, 2014.

[17] Ghanbari, R. Solutions of fuzzy lr algebraic linear systems using linear program. *Applied Mathematical Modelling*, 30:5164–5173, 2015.

[18] Ghanbari. M, Nuraei. R. Convergence of a semi-analytical method on the fuzzy linear systems. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 11(4):45–60, 2014.

[19] Ghanbari. R, Mahdavi-Amiri. N. Fuzzy lr linear systems: Quadratic and least squares models to characterize exact solutions and an algorithm to compute approximate solutions. *Soft Computing*, 19:205–216, 2015.

[20] Ghanbari. R, Mahdavi-Amiri. N, Yousofpour. R. Exact and approximate solutions of fuzzy lr linear systems: New algorithms using a least squares model and the ABS approach. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 7:1–18, 2010.

[21] Hashemi. S. M, M. Mirnia. K, Shahmorad. S. Solving fuzzy linear systems by using the schur complement when coefficient matrix is an m-matrix. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 5(3):15–29, 2008.

[22] Jahantigh. M. A, Khezerloo. S, Khezerloo. M. Complex fuzzy linear systems. *Internationa Journal of Industrial Mathematics*, 2(1):21–28, 2010.

[23] Karthik. N. J, Chandrasekaran. E. Solving fully fuzzy linear systems with trapezoidal fuzzy number matrices by singular value decomposition. *International Journal of Fuzzy Mathematical Archive*, 3:16–22, 2013.

[24] Khezerloo. S, Montazeri. M, Valizadeha. Z. A new method for solving fuzzy linear system. *International Journal of Industrial Mathematics*, 2(2):97–104, 2010.

[25] Majumdar, S. Numerical solutions of fuzzy complex system of linear equations. *German Journal of Advanced Mathematical Sciences*, 1:20–26, 2013.

[26] Majumdar. S, Nayak. S, Chakraverty. S. Fuzzy and interval finite element method for heat conduction problem. *International Journal of Advances in Applied Sciences (IJAAS)*, 1(4):171–180, 2012.

[27] Mansouri. P, Asady. B. Iterative methods for solving fuzzy linear systems. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5(7):1036–1049, 2011.

[28] Miao. S. X, Zheng. B, Wang. K. Block sor methods for fuzzy linear systems. *Journal Applied Mathematics and Computing*, 26:201–218, 2008.

[29] Ming. M, Friedman. M, Kandel. A. A general fuzzy least squares. *Fuzzy Sets and Systems*, 88:107–118, 1997.

[30] Mishmast Nehi. H, Maleki. H. R, Mashinchi. M. A canonical representation for the solutions of fuzzy linear systems and fuzzy linear programming problem. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 20(1):345–354, 2006.

[31] Muzzioli. S, Reynaerts. H. Fuzzy up and down probabilities in a financial problem. *Journal of the National Science Foundation*, doi:10.1.1.506.7366.

[32] Naghiloo. J, Saneifard. R. Solving fuzzy linear systems by district matrix's, an application in gis. *Research Journal of Environmental and Earth Sciences*, 6(7):389–393, 2014.

[33] Nasseri, S. H. Fuzzy linear systems: A decomposition method and some new results. *Journal of Applied Mathematics, Islamic Azad University of Lahijan*, 5(17), 2008.

[34] Nasseri. S. H, Gholami. M. Linear system of equations with trapezoidal fuzzy numbers. *The Journal of Mathematics and Computer Science*, 3(1):71–79, 2011.

[35] Otadi. M, Mosleh. M, Abbasbandy. S. Solving fuzzy linear system by fuzzy neural network and applications in economics. *Journal of Mathematical Extension*, 5(2):47–66, 2011.

[36] Otadi. M, Mosleh. M. Minimal solution of fuzzy linear systems. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 12(1):89–99, 2015.

[37] Pandit, P. Systems with negative fuzzy parameters. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*, 3(2), 2013.

[38] Paripoura. M, Saeidian. J, Sadeghi. A. A new approach to solve fuzzy system of linear equations by homotopy perturbation method. *Journal of Linear and Topological Algebra*, 2(2):105–115, 2013.

[39] Radhakrishnan. S, Sattanathan. R, Gajivaradhan. P. Lu decomposition method for solving fully fuzzy linear system with trapezoidal fuzzy numbers. *Bonfring International Journal of Man Machine Interface*, 2(2), 2012.

[40] Rahgooy. T, Sadoghi Yazdi. H, Monsefi. R. Fuzzy complex system of linear equations applied to circuit analysis. *International Journal of Computer and Electrical Engineering*, 1(5):1793–8163, 2009.

[41] Senthilkumar. P, Rajendran. G. An algorithmic approach to solve fuzzy linear systems. *Journal of Information Computational Science*, 8(3):503–510, 2011.

[42] Tian. Z, Hu. L, Greenhalgh. G. Perturbation analysis of fuzzy linear systems. *Information Sciences*, 180:4706–4713, 2010.

[43] Vroman. A, Deschrijver. G, Kerre. E. A solution for systems of linear fuzzy equations in spite of the non-existence of a field of fuzzy numbers. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 13(3):321–335, 2005.

[44] Vroman. A, Deschrijver. G, Kerre. E. Solving systems of linear fuzzy equations by parametric functions an improved algorithm. *Fuzzy Sets and Systems*, 158:1515–1534, 2007.

[45] Wang, K. Uzawa method for fuzzy linear systems. *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, pp. 1–7, 2013.

[46] Zheng. B, Wang. K. General fuzzy linear systems. *Applied Mathematics and Computation*, 181:1276–1286, 2006.

[47] Zhou. J, Wei. H. A gmres method for solving fuzzy linear equations. *International Journal of Fuzzy System*, 16(2), 2014.

[48] Zimerman, H. J. *Fuzzy Set Theory and its Applications.* Kluwer Academic, Norwell, 3rd edition, 1996.